

1 Entrega 1: Ejercicios Resueltos

1. Calcular el conjunto de números reales solución de la siguiente inecuación

$$\frac{2x}{x-1} > \frac{x}{x+7}$$

Solución:

$$\frac{2x}{x-1} > \frac{x}{x+7} \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} - \frac{x}{x+7} > 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+15)}{(x-1)(x+7)} > 0.$$

Queremos calcular, por tanto, el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : x(x+15) > 0 \text{ y } (x-1)(x+7) > 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x(x+15) < 0 \text{ y } (x-1)(x+7) < 0\}. \quad (1)$$

Denotemos por

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x(x+15) > 0 \text{ y } (x-1)(x+7) > 0\}$$

y por

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x(x+15) < 0 \text{ y } (x-1)(x+7) < 0\}.$$

Entonces, se puede escribir A como

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x(x+15) > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : (x-1)(x+7) > 0\}.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} : x(x+15) > 0\} &= \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ y } (x+15) > 0\} & (2) \\ \cup \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ y } (x+15) < 0\} &= (0, +\infty) \cup (-\infty, -15) \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} : (x-1)(x+7) > 0\} &= \{x \in \mathbb{R} : (x-1) > 0 \text{ y } (x+7) > 0\} & (3) \\ \cup \{x \in \mathbb{R} : (x-1) < 0 \text{ y } (x+7) < 0\} &= (1, +\infty) \cup (-\infty, -7). \end{aligned}$$

El conjunto A es la intersección de los conjuntos especificados en (2) y (3). La solución de dicha intersección es

$$A = (1, +\infty) \cup (-\infty, -15).$$

El cálculo de B es análogo. En primer lugar, B se puede escribir como

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x(x+15) < 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : (x-1)(x+7) < 0\}.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} : x(x+15) < 0\} &= \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ y } (x+15) < 0\} & (4) \\ \cup \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ y } (x+15) > 0\} &= \emptyset \cup (-15, 0) = (-15, 0) \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} : (x-1)(x+7) < 0\} &= \{x \in \mathbb{R} : (x-1) > 0 \text{ y } (x+7) < 0\} & (5) \\ \cup \{x \in \mathbb{R} : (x-1) < 0 \text{ y } (x+7) > 0\} &= \emptyset \cup (-7, 1) = (-7, 1). \end{aligned}$$

El conjunto B es la intersección de los conjuntos especificados en (4) y (5). La solución de dicha intersección es

$$B = (-7, 0).$$

Para terminar, la solución del problema es la unión de A y B (véase (1)), es decir,

$$A \cup B = (1, +\infty) \cup (-\infty, -15) \cup (-7, 0).$$

2. Calcular el conjunto de números reales solución de la siguiente inecuación

$$|x| + x > 1$$

Solución:

Los valores de $x > 0$ que cumplen la inecuación son

$$2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

o análogamente $(\frac{1}{2}, +\infty)$

No existen valores de $x \leq 0$ que cumplan la inecuación dado que se tendría que cumplir que

$$-x + x > 1$$

o análogamente

$$0 > 1.$$

Por tanto, la solución es $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

3. Calcular el dominio de la función $f(x) = \ln\sqrt{x^2 - 1}$

Solución:

$$Dom_f = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 1} > 0\}$$

dado que $\ln x$ sólo está definido para los reales positivos.

Se tiene que

$$\sqrt{x^2 - 1} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0$$

o análogamente

$$x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ ó } x < -1$$

Por tanto,

$$Dom_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < -1\}.$$