1 Ejercicios de la Entrega 2 Resuletos:

Día de Entrega: Jueves 29-Noviembre-07, antes de las 11:45 a.m.

1. Calcular los siguentes límites:

$$\text{a.} \lim_{x \to o} \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \to o^-} \frac{x^2 - 1}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to o^+} \frac{x^2 - 1}{x^2} = -\infty$$

Entonces, se puede escribir que

$$\lim_{x \to o} \frac{x^2 - 1}{x^2} = -\infty.$$

$$\text{b.} \lim_{t \to -2} \frac{t^2 - 4}{t^2 + 10t + 16} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

Lo resolvemos por el método de simplificación. Factorizamos el polinomio del numerador y el denominador

$$\lim_{t \to -2} \frac{t^2 - 4}{t^2 + 10t + 16} = \lim_{t \to -2} \frac{(t+2)(t-2)}{(t+2)(t-8)} \lim_{t \to -2} \frac{(t-2)}{(t-8)} = \frac{-4}{-10} = \frac{2}{5}$$

$$\text{c. } \lim_{h \to o} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

Lo resolvemos por el método de simplificación. Desarrollamos el polinomio del numerador.

$$\begin{aligned} (x+h)^3 &= (x+h)^2(x+h) = (x^2 + h^2 + 2xh)(x+h) = \\ &\quad x^3 + h^2x + 2x^2h + x^2h + h^3 + 2xh^2 \end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{h \to o} \frac{h^2x + 2x^2h + x^2h + h^3 + 2xh^2}{h} &= \lim_{h \to o} \frac{h(hx + 2x^2 + x^2 + h^2 + 2xh)}{h} = \\ &= \lim_{h \to o} \frac{(hx + 2x^2 + x^2 + h^2 + 2xh)}{1} = 3x^2 \end{aligned}$$

$$\text{d.} \lim_{h \to o} \frac{\sqrt[3]{27+h} - 3}{h} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

Primero, siguiendo la indicación, hacemos un cambio de variable. Sea $u = \sqrt[3]{27+h} - 3$. Entonces despejando h de dicha igualdad obtenemos que $h =$

$(u+3)^3-27$. Ademas, se tiene que si $h \to 0$ entonces $u \to 0$ también. Con lo que podemos escribir lo siguiente:

$$\lim_{h\to o} \frac{\sqrt[3]{27+h}-3}{h} = \lim_{u\to o} \frac{u}{(u+3)^3-27} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

Lo resolvemos por el método de simplificación. Desarrollamos el polinomio del denominador.

$$\lim_{u\to o} \frac{u}{u^3+9u^2+27u} = \lim_{u\to o} \frac{1}{u^2+9u+27} = \frac{1}{27}$$

2. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones. Para aquéllas que no sean continuas en algún punto estudiar de que tipo de discontinuidad se trata:

$$\text{a. } f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$$

La función es continua para cualquier punto $x \neq -1$. Estudiemos que pasa para $x = -1$. En primer lugar, $f(-1)$ no está definido porque se anula el denominador de $\frac{1}{x+1}$. Veamos que pasa con el limite de $f(x)$ cuando $x \to -1$.

$$\lim_{x\to -1^-} e^{\frac{1}{x+1}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to -1^+} e^{\frac{1}{x+1}} = e^{+\infty} = +\infty$$

Entonces no existe $\lim\limits_{x\to -1} e^{\frac{1}{x+1}}$. En $x = -1$ la función tiene una discontinuidad de 2^a especie y de tendencia a infinito. Para ser más precisos, si estudiamos la contiunidad a la derecha e izquierda de $x = -1$ se obtiene que a la derecha tiene una discontinuidad de 2^a especie y de tendencia a infinito, mientras que a la izquierda tiene una discontinuidad de 1^a especie evitable.

$$\text{b. } g(p) = \begin{cases} \frac{e^p}{p} - e & \text{si } p < 1 \\ \ln p & \text{si } p \geq 1 \end{cases}$$

La función es continua para cualquier punto $p \neq 1$ y $p \neq 0$.

Sea $p = 0$, entonces $g(0)$ no está definida.

$$\lim_{p\to o^-} \frac{e^p}{p} - e \ = -\infty$$

$$\lim_{p\to o^+} \frac{e^p}{p} - e = +\infty$$

En $p = 0$ la función tiene una discontinuidad de 2^a especie y de tendencia al infinito.

$$\text{c. } h(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La función es continua en cualquier punto $x \neq 0$. Veamos que sucede en $x = 0$. Se tiene que $h(0) = 0$. Además,

$$\lim_{x \to o^-} h(x) = \lim_{x \to o^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \to o^-} -1 = -1$$

$$\lim_{x \to o^+} h(x) = \lim_{x \to o^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to o^+} 1 = 1$$

Entonces no existe $\lim_{x \to o} h(x)$. En $x = 0$ se tiene una discontinuidad de 1^a especie inevitable (de salto finito).

3. Estudiar para que valores de a y b son continuas las siguientes funciones:

$$\text{a. } f(x) = \begin{cases} \ln(x + a) & \text{si } x \in (0, 1) \\ bx + a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

En primer lugar, para que $f(x)$ esté bien definida cuando $x \in (0, 1)$ se tiene que dar que $a \geq 0$. La función es continua en cada una de las partes. Por tanto, basta con estudiar que pasa para el punto $x = 1$ (dado que es el punto donde cambia la definición de la función). Se tiene que $f(1) = b + a$.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \ln(x + a) = \ln(1 + a)$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} bx + a = b + a$$

Para que exista el $\lim_{x \to 1} f(x)$ tienen que coincidir los limites laterales y coincidir con el valor de la función en el punto $f(1)$. Por tanto

$$\ln(1 + a) = b + a$$

o análogamente

$$b = \ln(1 + a) - a$$

Cualquier par de valores $(a, b) = (a, \ln(1 + a) - a)$ con $a \geq 0$ es solución del problema (es decir, para dichos parámetros la función es continua en todo su dominio). Por ejemlo, $(a = 1, b = ln2 - 1)$ es una solución.

$$\text{b. } f(x) = \begin{cases} e^{x^2 + ab} & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + ab & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función es continua en cada una de las partes. Por tanto, basta con estudiar que pasa para el punto $x = 1$ (dado que es el punto donde cambia la definición de la función). Se tiene que $f(1) = e^{1+ab}$.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} e^{x^2 + ab} = e^{1+ab}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 + ab = 1 + ab$$

Para que exista el $\lim_{x\to 1} f(x)$ tienen que coincidir los limites laterales y coincidir con el valor de la función en el punto $f(1)$. Por tanto

$$e^{1+ab} = 1 + ab$$

En general, se tiene que $e^x > x$ para cualquier valor de x.

Con lo que esto implica que para cualquier valor de a y b se tiene que

$$e^{1+ab} > 1 + ab$$

y por tanto la función $f(x)$ es discontinua de 1^a especie inevitable (de salto finito) en $x = 1$ independientemente de los valores de a y b.