Matemàtiques per Economistes I

Llista de problemes

I. Anàlisi d'una variable

Departament d'Economia i d'Història Econòmica

Universitat Autònoma de Barcelona

1 Introducció.

1.1 a) Demostreu que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. b) Suposeu que no coneguéssiu quina quantitat és π, és a dir no sabéssiu que $\pi = 3.14159\ldots$. Com faríeu per obtenir-ne una aproximació.

1.2 Trobeu el conjunt de nombres reals solució de cada una de les següents equacions o inequacions:

$a)\ 3x - 4 > 0$

$b)\ (x+1)(x-3) > 0$

$c)\ 5x + 9 < 0$

$d)\ \dfrac{x+1}{x^2-4} < 0$

$e)\ -4x + 3 > 0$

$f)\ |x^2 - 1| \leq 1$

$g)\ \dfrac{3x}{5} + 6 > 2$

$h)\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} > 0$

$i)\ 3x - 5 > 6x - 7$

$j)\ (x-\pi)(x+5)(x-3) > 0$

$k)\ 8x - 1 < 9x + 3$

$l)\ (x - 2^{1/3})(x - 2^{1/2}) > 0$

$m)\ 2x^2 - 7x + 6 \leq 0$

$n)\ 3x^2 + 2x - 1 < 0$

$o)\ \dfrac{2x}{x-1} > \dfrac{x}{x+7}$

$p)\ 3x^2 + 26x \geq 9$

$q)\ \dfrac{x}{2-4x} \leq \dfrac{5}{6}$

1.3 Sigui $I = (a, b)$ un interval obert. Trobeu els valors de x_0 i r per tal que $I = B(x_0, r)$.

1.4 Siguin $x, y, z \in \mathbb{R}$. Verificar

$a)$ $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Desigualtat triangular)

$b)$ $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$

$c)$ $||x| - |y|| \leq |x - y|$

$d)$ Usant (a) demostreu que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

1.5 Doneu una expressió equivalent de les següents expressions suprimint tant com es pugui el signe de valor absolut. *Per exemple* $|2+\sqrt{5}| = 2+\sqrt{5}$ *perquè la suma de positius és positiva.*

$a)|x^2 - 2xy + y^2|$

$b)\ |(|a+b| - |a| - |b|)|$

$c)\ |(|\sqrt{2}+\sqrt{3}| - |\sqrt{5}-\sqrt{7}|)|$

$d)\ |a-b| - |ab|$

1.6 Resoleu les següents inequacions i descriviu el conjunt solució en la recta real:

$a)\ |x-1| \leq 3$

$b)\ |x| + x > 1$

$c)\ |x^2-1| \geq 2$

$d)\ 2x+1-|x| > x$

$e)\ |x-3| \leq 2$

$f)\ |12-6x| \geq 4$

$g)\ |3x+8| \leq 6$

$h)\ \left|\frac{3x}{5} - 3\right| > 3$

$i)\ \left|\frac{x+2}{x^2+1}\right| \leq 1$

1.7 Considereu el pla cartesià, que denotem per $\mathbb{R}^2$. Dibuixeu els següents conjunts determinats per les desigualtats:

$a)\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x+a > y+b\}$

$b)\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } y \geq x^2\}$

$c)\ \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x^2 > 2\}$

$d)\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } |x+y| < 1\}$

$d)\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } (x-1)^2 + (y-2)^2 < 2\}$

$e)\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 < y < x^4\}$

$f)\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2+y^2 \geq 2x+2\}$

$g)\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } y \geq \ln\ x\}$

$h)\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } y \leq e^x\}$

$i)\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \ln\ x \leq y \leq \ln\ x\}$

$j)\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } y \leq |\sqrt{x}|\}$

$k)\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } y^2 \geq x\}$

$l)\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } |x| + |y| < 1\}$

$m)\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } |x| \geq |y|\}$

$n)\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x+y \text{ és un número enter}\}$

1.8 Determineu si les següents proposicions són certes o falses donant una prova rigurosa o un contraexemple segons correspongui. Els conjunts A i B representan conjunts qualsevol d'un cert espai.

$A \cup B = A \cup C \implies B = C$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (on el superindex c vol dir complementari)

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

1.9 Siguin $A = \{2n/n \in \mathbb{N}\},\ B = \{2n+1/n \in \mathbb{N}\},\ C = \{n^2/n \in \mathbb{N}\}$. Troba els elements que formen els següents conjunts:

$$a) A \cup B$$

$$b) A \cap B$$

$$c) A^c \cup C$$

$$d) (A \cup C)^c$$

$$e) (B \cap C)^c$$

1.10 Usant la definició de conjunt acotat superiorment i inferior, classifiqueu els següents conjunts en acotats (especificant si ho estan superiorment o inferior) i no acotats. Digueu també si són oberts o tancats.

$a) A = B(0, 10^{10})$

$b) B = \mathbb{Z}$

$c) C = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = \dfrac{n^2+1}{n+1} \text{ per algun } n \in \mathbb{N}\}$

$d) D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = 1/n \text{ per algun } n \in \mathbb{N}\}$

$e) G = A \cap B$

1.11 Sigui $A \subset \mathbb{R}$. Diem que $x_0 \in A$ és un punt aïllat de A si existeix una bola $B(x_0, r)$ complint que $B(x_0, r) \setminus \{x_0\} \cap A = \emptyset$. Demostreu que el conjunt $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ té tots els seus punts aïllats.

1.12 Sigui $A \subset \mathbb{R}$. Diem que $x_0 \in \mathbb{R}$ és un punt d'acumulació de A si per tot radi r l'entorn $B(x_0, r)$ compleix que $B(x_0, r) \setminus \{x_0\} \cap A \neq \emptyset$. Demostreu que $x_0 = 0$ és un punt d'acumulació del conjunt $A = \{x \in \mathbb{R} \quad \text{t.q.} \quad x = 1/n \quad \text{per algun} \quad n \in \mathbb{N}\}$.

2 Funció real de variable real

2.1 Calculeu el domini de les següents funcions:

$a)\ f(x) = x^2 - 1$

$b)\ f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x}$

$c)\ f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + x + 1}$

$d)\ f(x) = \tan x$

$e)\ f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

$f)\ f(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{x - 2}$

$g)\ f(x) = \ln\left(\dfrac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$

$h)\ f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & \text{si } x < 0 \\ \ln x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$i)\ f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$j)\ f(x) = e^{x - \ln x}$

$k)\ f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 1}$

$l)\ f(x) = \sqrt{\cos x}$

$m)\ f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}}$

2.2 Considerem les següents funcions,

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = e^x \quad h(x) = \ln x \quad k(x) = \tan x$$

a) Creieu que podem prendre qualsevol permutació d'elles i considerar la composició? estarà sempre ben definit?

b) Es cert que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ almenys en els punts on té sentit fer ambdues composicions? Es generalitzable aquest fet a altres composicions arbitràries de funcions?

c) Calculeu les expressions explícites de $(h \circ f \circ f)(x)$, $(g \circ k)(x)$, $(k \circ f \circ g)(x)$.

d) Expresseu les funcions $l_1(x) = e^{x^2}$ i $l_2(x) = \tan(\ln x^2)$ com a composició d'algunes de les funcions f, g, h, k.

2.3 Considerem les següents funcions, $f(x) = x^2 \quad g(x) = 2^x \quad h(x) = \ln x$. Determineu

a) $(f \circ g)(x)$

b) $(f \circ h)(x)$

c) $(f \circ g \circ h)(x)$

d) Expresseu cada una les funcions següents en termes de f, g, h utilitzant les operacions suma, producte, i composició de funcions

$i)\ k(x) = 2^{\ln x}$	$ii)\ k(x) = \ln(x^2)$
$iii)\ k(x) = \ln(2x)$	$iv)\ k(x) = (\ln x)^2$
$v)\ k(x) \ln(2^x + 2^{x^2})$	$vi)\ k(x) = \ln(\ln(2^{2^x} + x^2))$

2.4 Considerem la funció $f(x) = \frac{1+x}{x-1}$ en el seu domini natural $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Calculeu, si existeix, la funció inversa f^{-1} i trobeu el seu domini.

2.5 Diem que una funció f és periòdica de període T si $f(x) = f(x+T)$ per tot $x \in D(f)$.

a) Demostreu que si f és periòdica de període T llavors $g(x) = f(\alpha x)$ és periòdica de període $\frac{T}{\alpha}$.

b) Demostreu que si f és periòdica de període T llavors $h(x) = \alpha f(x)$ és periòdica de període T.

c) Estudieu la periodicitat i el període de la funció $l(x) = \sin \pi x + \cos \pi x$.

d) Comproveu que la funció $g(x) = \sin x$ és periòdica de període 2π

e) Comproveu que la funció $h(x) = \cos x$ és periòdica de període 2π

f) Comproveu que la funció $l(x) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x)$ és periòdica de període 2π

2.6 Sigui $g(x) = x^2$ i sigui

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

1) Per quins números reals y es compleix $h(y) \leq y$?

2) Per quins números reals y es compleix $h(y) \leq g(y)$?

3) Quina funció és $g(h(y)) - h(y)$?

2.7 Sigui r una recta de pendent m i p un punt exterior a r.

1) Comproveu de manera gràfica que hi ha infinites rectes perpendiculars a r. Quantes d'aquestes passen per p?

2) és conegut que totes les rectes perpendiculars a r tenen una propietat comú; tenir pendent $\frac{-1}{m}$. Usant aquesta propietat construïu un mètode per calcular la distància entre el punt $(1, 1)$ i la recta $x + y = 0$.

2.8 Considereu la gràfica de la funció $f(x) = x^3$. Usant això doneu la gràfica de les següents funcions: (c és un número real que pot ser, òbviament positiu, negatiu o zero. Considereu els diferents casos)

$a)$ $g(x) = f(x) + c$

$b)$ $g(x) = f(x + c)$

$c)$ $g(x) = cf(x)$

$d)$ $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$

$e)$ $g(x) = f(\dfrac{1}{x})$

$f)$ $g(x) = f(|x|)$

$g)$ $g(x) = |f(x)|$

$h)$ $g(x) = \max\{f, 0\}$

$i)$ $g(x) = \min\{f, 0\}$

2.9 Feu el mateix que el problema anterior per a la funció $f(x) = e^x$.

2.10 Considereu totes les diferents funcions obtingudes en els dos problemes precedents. Obtingueu, mitjanant el coneixement que teniu de la gràfica de totes elles, els màxims i mínims locals i globals tant en la recta real $\mathbb{R}$ com en l'interval $[-1, 1]$.

2.11 D'entre totes les relacions-funcions que un pot descriure entre el conjunt $\mathbb{R}$ i si mateix, n'hi ha algunes que són privilegiades per la seva importància. La majoria es poden expressar per fórmules algebraiques senzilles i cal saber reconèixer-les i dibuixar-les gràficament sense necessitat de grans càlculs (diríem que cal conèixer-les per *cultura matemàtica)*. Fonamentalment aquestes són: polinomis de grau 1 (rectes) i 2 (paràboles), exponencials i logarítmes. Així doncs, feu un esboç de les següents funcions amb el mínim de càlculs possibles.

$a)\ f(x) = 4x + 3$	$b)\ f(x) = -3x - 1$
$c)\ f(x) = 4x^2$	$d)\ f(x) = x^2 - 1$
$e)\ f(x) = \ln x$	$f)\ f(x) = e^x$
$g)\ f(x) = \dfrac{1}{x}$	$h)\ f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
$i)\ f(x) = \sqrt{x}$	

2.12 Penseu sobre el concepte de funció sense prejudicis matemàtics (és a dir, una funció és una correspondència entre dos conjunts de tal manera que cada element del conjunt de sortida té, com a màxim, una imatge en el conjunt d'arribada) i doneu exemples de funcions que descriguin fenòmens de la naturaleza però sense emprar, necessàriament, la notació matemàtica.

2.13 Concentrem ara la nostra atenció en la funció $f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$. Observeu que la seva gràfica sempre és una recta. Obtingueu els valors de a i b per tal que la recta compleixi cadascuna de les següents condicions:

a) Sigui horitzontal i passi per l'origen de coordenades

b) Tingui pendent 2 i passi pel punt (1,-1)

c) Sigui horitzontal i passi pel punt (3,3)

d) Passi per l'origen de coordenades i pel punt (1,-2)

e) Passi pel punt (1,-2) i cada cop que augmenta una unitat la variable x també augmenta una unitat la variable y

f) Sigui paral.lela a la recta $y = 2x + 1$ i passi pel punt $(0, 0)$

g) Sigui perpendicular a la recta $y = 2x + 1$ i passi pel punt $(-1, -1)$

2.14 En un estudi de l'economia dels EEUU durant el periode 1929-1941 es va poder constatar que la despesa total C en béns de consum i serveis està relacionada amb la renda nacional Y de la següent forma: quan $Y = 500$ tenim que $C = 470$. A més cada cop que la renta nacional augmenta en 100 unitats el consum de béns i serveis ho fa en 75 unitats. Suposant una relació lineal entre la renda nacional i el consum obtenir la funció que descriu la relació. Quin serà el cosum de béns i serveis quan la renda sigui $Y = 1000$?

3 Límits i continuïtat

3.1 Demostreu els resultats següents usant la definició de límit:

$$\text{a) } \lim_{x\to 2}(x+4) = 6, \quad \text{b) } \lim_{x\to 4}\sqrt{x} = 2$$

3.2 Demostreu que:

$$\text{a) } \lim_{x\to 1}(x^2+1) \neq 3, \quad \text{b) } \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \text{ no existeix (és infinit)}$$

3.3 Siguin l_1 i l_2 els límits, respectivament, de les funcions f i g quan $x \to a$. Demostreu, usant la definició de límit, que:

$$a) \lim_{x\to a} M \cdot f(x) = Ml_1, \text{ on } M \in \mathbb{R}$$
$$b) \lim_{x\to a}(f_1(x) + g_1(x)) = l_1 + l_2$$

3.4 Mostreu que $\lim_{x\to 1}(x^2-1)\cos\frac{1}{x^2-1} = 0$.

3.5 Els problemes que precedeixen en aquest requereixen d'un domini més o menys acurat de la noció de límit. Ara proposem un càlcul molt més sistemàtic basat en "les regles"de càlcul de límits conegudes per vosaltres. No obstant, potser cal pensar una mica sobre el que fem per tal de reconèixer la noció de límit dels problemes anteriors en aquestes "regles"més o menys misterioses (és a dir, substituir x per x_0 quan fem $\lim_{x\to x_0}$). Calculeu, doncs, els límits següents.

$a)$ $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$ $\qquad$ $b)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x+1}{3x+7}$

$c)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$ $\qquad$ $d)$ $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

$e)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}$ $\qquad$ $f)$ $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

$g)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ $\qquad$ $h)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-1}{x+3}\right)$

$i)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$ $\qquad$ $j)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x^2+x+1}$

$k)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+2}\right)^x$ $\qquad$ $l)$ $\displaystyle\lim_{x\to 1}e^{\frac{1}{x-1}}$

$m)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ $\qquad$ $n)$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\ln x^2$

$o)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin x$ $\qquad$ $p)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin x$

$q)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{2x-1}$ $\qquad$ $r)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3}{x^6+2x}$

$s)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-x+1}{\sqrt{x}+x-1}$ $\qquad$ $t)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$

$u)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(e^x-1)$ $\qquad$ $v)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

$w)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$ $\qquad$ $x)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{\frac{x^2}{2}}$

$y)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2\cos\left(\frac{x^2+2}{x}\right)$ $\qquad$ $z)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+x-6}{2x^2+3x+5}$

$aa)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x^2-3x+4}$ $\qquad$ $bb)$ $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

3.6 Considereu la funció,

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Calculeu, si existeixen, els límits següents:

$$a)\ \lim_{x\to 0} h(x) \qquad b)\ \lim_{x\to 1} h(x) \qquad c)\ \lim_{x\to\infty} h(x)$$

3.8 El càlcul de límits de funcions de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ permet descriure el límit de una funció en un punt x_0 usant els límits laterals. La idea que hi ha darrera no és altra que tenir present a l'hora de calcular el límit si m'estic acostant per valors més grans o més petits que x_0 (suposem $x \to x_0$). L'interès de fer límits laterals és l'estudi de la continuïtat de una funció en un punt com veurem més endavant. Calculeu, doncs, els límits laterals següents:

$a)\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}$

$b)\ \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{1/x}}$

$c)\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{1/x}}$

$d)\ \displaystyle\lim_{x\to 0^-} |x|$

$e)\ \displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x}$

$f)\ \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{x\sin x}{|x|}$

$g)\ \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}$

$h)\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x$

$i)\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} |x|$

$j)\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$ on $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1), & \text{si } x < 0 \\ 1+x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

3.9 Considereu les funcions

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \ln(x^2+1), & x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} |x| & x \leq -1 \\ e^{-x}, & x > -1 \end{cases}$$

Obtingueu els següents límits laterals:

$$a)\ \lim_{x\to 0^+} f(x) \quad b)\ \lim_{x\to -1^-} g(x) \quad c)\ \lim_{x\to 0^+} (f(x) - g(x))$$

3.10 Raoneu si són certes o no les següents implicacions:

$$a)\ \lim_{x\to a} f(x) = l \implies f(a) = l$$

$$b)\ f(a) = l \implies \lim_{x\to a} f(x) = l$$

3.11 Una funció, f, és contínua en un punt, x_0, si els límits laterals de la funció en aquest punt existèixen i coincidèixen amb el valor que pren la funció en aquest punt. és important tenir en compte que aquesta definició és local i, per tant, el fet que una funció sigui contínua (o no) en un punt no dóna cap informació sobre la continuïtat de la mateixa funció en qualsevol altre punt diferent de x_0. Passarem ara a estudiar la continuïtat de funcions en tot el seu domini. Això implica per tant, saber separar els punts on la funció pot patir alguna patologia d'aquells on simplement la funció és contínua pel fet de ser polinomial, exponencial, logarítmica, trigonomètrica, etc. En els punts patològics caldrà un estudi més acurat usant fortament el càlcul de límits vist anteriorment. Estudieu, doncs, la continuïtat de les següents funcions en tots els punts del seu domini de definició i, en cas de ser discontínues en algun punt, digueu de quin tipus de discontinuïtat es tracta:

$a)$ $f(x) = x - 2$

$b)$ $f(x) = e^{x - \ln(x^2+1)}$

$c)$ $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

$d)$ $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

$e)$ $f(x) = \dfrac{1+x^3}{1+x}$

$f)$ $f(x) = e^{1/x}$

$g)$ $f(x) = x \sin \dfrac{\pi}{x}$

$h)$ $f(x) = \ln(\dfrac{1}{x})$

$i)$ $f(x) = 0$

$j)$ $\sqrt{\dfrac{x}{|x|}}$

$k)$ $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 3 \\ 2x+1, & \text{si } x > 3 \end{cases}$

$l)$ $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x} - e, & \text{si } x < 1 \\ \ln x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$m)$ $f(x) = \begin{cases} x\ln(x^2+1), & \text{si } x \leq 0 \\ xe^x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$n)$ $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < -1 \\ 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$o)$ $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$p)$ $f(x) = \begin{cases} \ln|x|, & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x^2+1}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$q)$ $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$

$r)$ $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

$s)$ $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$

3.12 Siguin $f(x)$ i $g(x)$ funcions contínues en el punt x_0. Demostreu que $f(x) + g(x)$ i $f(x)g(x)$ també són funcions contínues en el punt x_0.

3.13 Sigui $h(x) = f(x) + g(x)$. Raoneu si són certes o no les següents implicacions:

a) Si $h(x)$ és contínua $\implies$ $f(x)$ i $g(x)$ són contínues

b) Si $h(x)$ és contínua i $g(x)$ també és contínua $\implies$ $f(x)$ contínua

3.14 Vegeu per a quins valors dels paràmetres a, b les següents funcions són contínues (cal que imposeu que els dos límits laterals coincideixin amb el valor de la funció en el punt conflictiu):

$a)\ f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{si } x \neq 2 \\ a, & \text{si } x = 2 \end{cases}$ $\qquad b)\ f(x) = \begin{cases} ax^2+1, & \text{si } x \leq 1 \\ a, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$c)\ f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x \leq 0 \\ ax+b, & \text{si } x \in (0,1] \\ \ln(bx), & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $\qquad d)\ f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right), & \text{si } x \leq 0,\ a \neq 0 \\ x-a, & \text{si } x \in (1,2) \\ e^{\frac{x-a}{2}}, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$e)\ f(x) = \begin{cases} \ln(x+a), & \text{si } x \in (0,1) \\ bx+a, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ $\qquad f)\ f(x) = \begin{cases} e^{x^2+ab}, & \text{si } x \leq 1 \\ x^2+ab, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$g)\ f(x) = \begin{cases} a, & \text{si } x < -2 \\ x^2-b, & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ ax+b, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ $\qquad h)\ f(x) = \begin{cases} \ln(x+1)+a, & \text{si } x \in [-1,1] \\ e^x+2bx^2, & \text{si } 1 < x < 2 \\ \sin \pi x + (a+1)x, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$i)\ f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b, & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x+ab}, & \text{si } x > 0,\ a,b > 0 \end{cases}$

3.15 Definim la funció signe, sgn(x), de la següent forma:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Estudieu la continuïtat de les següents funcions:

a) $f(x) = \text{sgn}(x)$ b) $f(x) = x\ \text{sgn}(x)$

3.16 Doneu un exemple d'una funció f que no sigui contínua en cap punt, però tal que $|f|$ sigui contínua en tots els punts.

3.17 Si una funció és contínua en $[0,1]$ i només pren valors racionals, de quin tipus de funció es tracta ?

3.18 Estudieu les següents afirmacions decidint si són certes o falses. Cas que siguin certes digueu quin argument feu servir i cas que siguin falses doneu un contraexemple.

a) Tota funció contínua en un interval obert és acotada.

b) Si f és una funció contínua en un interval obert (a, b) llavors $\exists x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) \leq f(x),\ \forall x \in (a, b)$

c) Sigui f una funció contínua en l'interval tancat $[2, 3]$. Suposem que $f(2) = 7$ i $f(3) = 9$. Llavors $\exists x_0 \in (2, 3)$ amb $f(x_0) = 8$

d) Suposem que f és una funció contínua a $\mathbb{R}$ i que $f(0) = 0$. Llavors $\exists x_0 \in \mathbb{R}\ i\ x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) < 0$ i $f(x_1) > 0$.

3.19 Considerem la funció que a cada x real li fa correspondre el més gran enter que és més petit que ell. Es denota per $f(x) = [x]$ i es denomina part entera de x. Per exemple: $f(\sqrt{2}) = [\sqrt{2}] = 1$ i $f(-4.5) = [-4.5] = -5$.

a) Doneu la gràfica de la funció.

b) Doneu els punts de discontinuïtat i digueu de quin tipus són. En els punts de discontinuïtat quin dels límits laterals coincideix amb la imatge de la funció en el punt?

c) Feu els dos apartats anteriors amb les funcions $f(x) = x - [x]$ i $f(x) = \frac{1}{(\frac{1}{x})}$.

3.20 Demostreu que les següents funcions tenen una arrel (és a dir, $f(x_0) = 0$) en els intervals que s'indican

$$a)\ f(x) = e^x - (x + 2) \text{ en } [0, 10]$$

$$b)\ f(x) = cos x - x^2 \text{ en } [0, 2\pi]$$

3.21 Useu el teorema de Bolzano per resoldre els següents apartats

a) Siguin $f : [0,1] \to [0,1]$ i $g : [0,1] \to [0,1]$ dues funcions contínues. Suposem que $f(a) < g(a)$ i $f(b) > g(b)$. Llavors $\exists c \in (0,1)$ tal que $f(c) = g(c)$

b) Sigui $f : [0,1] \to [0,1]$. Suposem que $f(0) > 0$ i $f(1) < 1$. Llavors $\exists c \in (0,1)$ tal que $f(c) = c$ *Ind: Apliqueu (1) per al cas* $g(x) = x$

3.22 Sigui f una funció contínua en tot el seu domini tal que $f(0) = -6$ i $f(x) > x^2$ si $|x| > 10$. Demostreu que existeixen $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $f(a) = f(b) = 0$

3.23 Demostreu que tot polinomi de grau senar té almenys una arrel. Es pot dir al mateix dels polinomis de grau parell? (*Ind: Teorema de Bolzano per un interval "molt gran"*). Usant el resultat anterior vegeu que el polinomi $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$ té almenys una arrel negativa.

3.24 El Teorema de Bolzano pot ser utilitzat per aproximar zeros de funcions; és a dir, donada una funció $f(x)$ podem aproximar els punts per els quals $f(x) = 0$. Utilitzant com a idea fonamental el Teorema de Bolzano, obtingueu un mètode per aproximar zeros de funcions i apliqueu la tècnica per donar una aproximació "raonable"d'alguns zeros de les seguents funcions:

$a)\ f(x) = e^x - x$ $\qquad b)\ f(x) = \ln x - x + 3$

$c)\ f(x) = x^2 - 2x + 1 - e^x$ $\qquad d)\ f(x) = \sin x - \cos x$

3.25 Un escalador inicia l'última rampa de l'Everest a les 6h d'un dia clar. Després de diversos intents en els quals puja i baixa parcialment assoleix el cim a les 17h. Donat el bon temps decideix passar la nit al cim (i guanyar així el record Guiness). A les 6h del dia següent inicia el descens per arribar al camp base a les 18h. Proveu que en una mateixa hora dels dos dies ha estat en una mateixa posició.

3.26 Demostreu que una funció f definida en els reals i contínua en $x_0 = 0$ tal que $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ és una funció contínua en tot punt.

3.27 (*Difícil*) Demostreu que no hi ha cap funció contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que prengui exactament dos vegades cada valor. *Ind: Per començar féu un dibuix.*

3.28 (*Difícil*) Sigui $f : [0,1] \to [0,1]$ contínua. Suposem que per algun $z \in [0,1]$ es compleix que $f(f(z)) = z$ (és a dir que hi ha un punt 2-periòdic). Demostreu que llavors existeix $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$ (és a dir, hi ha un punt 1-periòdic) *Obs: De fet perquè z sigui 2-periòdic és necessari que $f(z) \neq z$ ja que sino seria 1-periòdic. El periòde és la mínima iteració que "torna el punt a ell mateix".*

3.29 (*Difícil*) Sigui f una funció contínua en un interval $I \in \mathbb{R}$ i siguin $x_1 \dots x_n$ punts de I. Demostreu que existeix un $c \in I$ tal que

$$f(c) = \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

3.30 Useu el resultat de l'exercici 3.29 per demostrar que si un cotxe recorre 100 Kilómetres en 50 minuts llavors hi ha un minut en el que ha recorregut 2 Kilòmetres.

3.31 Demostreu que $P(x) = 2x^4 - 14x^2 + 14x - 1$ té quatre arrels reals. Trobeu amb un error més petit que 10^{-1} l'arrel de valor absolut més gran *Obs: De fet aquest polinomi només té aquestes quatre arrels que heu trobat ja que, com provarem més endevant, un polinomi de grau n com a màxim té n arrels.*

4 Derivabilitat

4.1 Calculeu per mitjà de la definició la derivada de les següents funcions en un punt x_0.

$a)\ f(x) = x^n \qquad b)\ f(x) = x^2 + 1$

$c)\ f(x) = 2x^2 - x + 1 \qquad d)\ f(x) = \ln x$

4.2 Demostreu les següents igualtats:

$$a)\ \lim_{x \to x_0} \frac{f^2(x) - f^2(x_0)}{(x - x_0)} = 2f(x_0)f'(x_0)$$

$$b)\ \left(\frac{1}{f(x_0)}\right)' = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

4.3 Demostreu que si f i g són funcions derivables en x_0 llavors es compleix que fg és derivable en x_0 i que la derivada és $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

4.4 Demostreu que tota funció derivable en un punt és també contínua en aquest punt. Es cert el recíproc?

4.5 Construïu un exemple d'una funció contínua a tot $\mathbb{R}$ i derivable només en el conjunt $\{\mathbb{R} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}\}$

4.6 Sigui f una funció contínua en $x_0 = 0$. Considerem la funció $g(x) = xf(x)$. Demostreu que g és derivable en $x_0 = 0$ i busqueu $g'(0)$

4.7 La noció de derivada en un punt es pot interpretar geomètricament com el pendent de la recta tangent en el punt. Usant aquest fet calculeu l'equació de la recta tangent a les següents funcions en els punts que s'indiquen.

a) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ en el punt $x_0 = 0$

b) $f(x) = 3$ en el punt $x_0 = 1$

c) $f(x) = \sin(\cos^2(x))\cos(\sin^2(x))$ en el punt $x_0 = \pi$

4.8 Volem, ara, aprofundir una mica en la noció de derivada com el pendent de la recta tangent en un punt. Sigui f una funció derivable a $\mathbb{R}$. Anomanem *polinomi de Taylor de grau 1 de la funció f al voltant d'un punt x_0* a la funció lineal $P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

a) Comproveu que el polinomi definit coincideix amb l'equació de la recta tangent

b) Considereu la funció $f(x) = e^x$. Obtingueu el polinomi $P(x)$ pel punt $x_0 = 0$

c) Calculeu (usant la calculadora) el valor de $e^{0.5}$. Avalueu $P(0.5)$ i compareu els resultats

d) Considereu qualsevol equació de recta diferent de $P(x)$ que passi pel punt $(0, 1)$ i avalueu-la en 0.5. Què podeu concloure ?

4.9 Calculeu $f^{(5)}(0)$ per cadascuna de les següents funcions:

$a)\ f(x) = e^x$	$b)\ f(x) = \ln(x+1)$
$c)\ f(x) = x$	$d)\ f(x) = \sqrt{x}$

4.10 En el mateix sentit del problema anterior calculeu $f^{(n)}(0),\ n \in \mathbb{N}$ per cadascuna de les funcions.

4.11 Considerem la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & \text{si } x \leq 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}x), & \text{si } 0 < x < 1 \\ \ln x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Estudieu la continuïtat en el punt $x_0 = 0$, segons els valors del paràmetre a. Estudieu, també, la continuïtat i la derivabilitat en el punt $x_1 = 1$.

4.12 Considerem la funció

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2 - 10x, & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 4e^x + k, & \text{si } 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

Calcular el valor de k per tal que la funció sigui contínua. Calcular per aquest valor de k la funció $f'(x)$. Es continua en qualsevol punt?

4.13 Estudieu la continuïtat i la derivabilitat de les següents funcions en els punts que s'indiquen (per les funcions definides a trossos considereu el punt on connecten ambdues expressions algebraiques).

$a)$ $f(x) = |\ln(x)|$ en $x_0 = 1$

$b)$ $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ en $x_0 = 1$

$c)$ En $x_0 = 0,\ f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$d)$ En $x_0 = 0,\ f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x \le 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$e)$ En $x_0 = 1/2,$ i segons els valors del paràmetre α

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & \text{si } x < 1/2 \\ \sin(x - \frac{\pi}{2}), & \text{si } x \ge 1/2 \end{cases}$$

4.14 Considerem la funció

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+a}, & \text{si } x \le -1 \\ x(x-1) + b, & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{c}{x}, & \text{si } x \ge 1. \end{cases}$$

Estudieu la continuïtat i la derivabilitat en els punts $x_0 = -1$ i $x_1 = 1$ segons els valors dels paràmetres a, b, c.

4.15 Sigui $h(x)$ tal que $h(0) = 0$ i $h'(x) = cos(3x)$. Calculeu $(f \circ h)'(0)$.

4.16 Calculeu la funció derivada de les següents funcions:

$a)$ $f(x) = (x^2 + 1)^{\cos x}$

$b)$ $f(x) = (\dfrac{\tan x}{e^x})^{1/3}$

4.17 Fins aquest moment hem considerat la derivada com aquell número al qual tendeixen els quocients incrementals, per tant ha estat considerada com una realitat local o "puntual". No obstant això, tothom ha sentit a parlar que la derivada de $f(x) = x^2$ és $f'(x) = 2x$. s a dir, a cada funció (derivable) li fem correspondre una funció derivada. Cal pensar doncs que la funció derivada, $f'(x)$, és aquella funció que en cada punt x_0 pren el valor de la derivada de la funció $f(x)$ en aquest punt. Equivalentment $f'(x)_{|x=x_0} = f'(x_0)$. Calculeu la funció derivada (és a dir, $f'(x)$ per les següents funcions usant les regles conegudes de derivació) en els punts on aquesta existeix.

$a)\ f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$b)\ f(x) = \ln x$	$c)\ f(x) = e^x$
$d)\ f(x) = \sin x$	$e)\ f(x) = \ln x^2$	$f)\ f(x) = e^{xe^x}$
$g)\ f(x) = \sin(\cos x)$	$h)\ f(x) = x^x$	$i)\ f(x) = \sqrt{\ln x}$

4.18 El següent resultat és conegut amb el nom de Teorema de Rolle: *Sigui f una funció contínua en un interval tancat [a,b] i derivable en l'obert (a,b) que satisfà $f(a) = f(b)$. Llavors existeix un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.* Useu aquest resultat per contestar els següents apartats

a) Demostreu que l'equació $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1,\ n \in \mathbb{N}$ té una **única** arrel positiva

b) Sigui $f : [0, 1] \to [0, 1]$ derivable i complint que $f'(x) > 0\ \forall x \in (0, 1)$. Suposem a més que $f(0) > 0$ i $f(1) < 1$. Llavors existeix un **únic** $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = c$

c) Trobeu una funció f definida en $[0, 1]$ que sense verificar les hipòtesis del Teorema de Rolle satisfaci $f'(c) = 0$ per a algun $c \in (0, 1)$

4.19 Considereu les funcions $f(y) = y(1 - y)$, $y(x) = \sqrt{x}$ i $h(x) = f(y(x))$. Utilitzeu (explícitament) la regla de la cadena per trobar els valors de x per als quals la funció $h(x)$ és creixent i còncava

4.20 Considereu la funció $f(x) = |x - 3|$. Verifica f el Teorema del valor mitjà en l'interval $[0, 5]$?

4.21 Calculeu els límits següents (fent ús, si cal, del Teorema de l'Hospital)

$a)\ \lim_{x\to 0} x\ln x$ $\qquad b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x},\ \ n\in\mathbb{N}$

$c)\ \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1}$ $\qquad d)\ \lim_{x\to 0} xe^{1/x}$

$e)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x}$ $\qquad f)\ \lim_{x\to\infty} \sqrt{x}-\ln x$

$g)\ \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$

4.22 (*Difícil*) Se suposa que els canvis de rasant de les autopistes es fan amb un perfil parabòlic $y=-ax^2,\ a>0$. Quin és el valor màxim de a que permet que un observador d'un metre d'alçada situat en qualsevol lloc pugui veure un objecte de 0.1 metres d'alçada situat a 100 metres de distància? (*Aquest problema fou proposat en l'Olimpíada Matemàtica de l'any 1986 a Barcelona. El concurs es fa amb alumnes de C.O.U*).

4.23 Sigui f una funció definida a $\mathbb{R}$. Doneu els candidats a màxim o mínim local (extrem local) de f en les següents situacions:

a) Suposant que f és derivable en tot punt.

b) Suposant que f és contínua en tot punt però no és derivable en els punts x_0, x_1 i x_2.

4.24 Doneu el conjunt de punts candidats a extrem local (sense classificar-los en màxims i mínims) i estudieu els intervals de creixement i decreixement de les següents funcions.

$a)\ f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ $\qquad$ $b)\ f(x) = |\ln x|$

$c)\ f(x) = \dfrac{(x-2)^3}{(x-1)^2}$ $\qquad$ $d)\ f(x) = (x-1)x^{2/3}$

$e)\ f(x) = \cos x$ $\qquad$ $f)\ f(x) = |\sin x|$

$g)\ f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $\qquad$ $h)\ f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

$i)\ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ $\qquad$ $j)\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x < -1 \\ x, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ -x(x-1), & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$k)\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x+1}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$l)$ Segons els valors del paràmetre a,

$$f(x) = \begin{cases} ax(x+1), & \text{si } x < 0 \\ -x((x-1), & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

4.25 Per a cadascuna de les funcions de l'exercici anterior classifiqueu els candidats en màxims, mínims i punts d'inflexió. Calculeu també els intervals de concavitat i convexitat

4.26 Doneu amb el màxim detall possible la gràfica de les funcions de l'exercici **4.24**.

4.27 Considereu la funció $f(x) = e^{x-(1/2x^2)}$. Feu la representació gràfica calculant totes les dades necessàries (màxims, mínims, asímptotes, etc).

4.28 Calculeu els màxims i mínims de la següent funció segons els valors del paràmetre a,

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [-1, 1] \\ \frac{a}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

4.29 Per cadascuna de les següents funcions calculeu els màxims i mínims locals i globals en els intervals que s'indiquen.

$a)$ $f(x) = x(x-1), D = [0,1]$ $b)$ $f(x) = -x(x-1), D = [0,\infty]$

$c)$ $f(x) = |\ln x|, D = (0,e]$ $d)$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, D = (-1,1)$

$e)$ $f(x) = \sin x + \cos x, D = [0, \dfrac{\pi}{2}]$

4.30 Fixeu-vos bé que la condició $f'(x) = 0$ només ens dóna informació d'extrems (màxims i mínims) locals. Calculeu ara els extrems globals de les següents funcions en els dominis que s'indiquen usant totes les eines necessàries.

$a)$ $f(x) = x(1-x), D = \mathbb{R}$ $b)$ $f(x) = x(1-x), D = [-1,1]$

$c)$ $f(x) = x(1-x), D = (-\infty,0)$ $d)$ $f(x) = |\ln x|, D = \mathbb{R}$

$e)$ $f(x) = |\ln x|, D = (0,\infty)$ $f)$ $f(x) = |\ln x|, D = (1,2)$

$g)$ $f(x) = x,\ D = \mathbb{R}$ $h)$ $f(x) = x, D = (-1,1)$

4.31 Sigui f una funció definida en l'interval tancat $[0,1]$. Suposem que f té un màxim local en $x = 1$. Digueu quina de les següents afirmacions és certa (només n'hi ha una):

$a)$ $f'(1) = 0$ $b)$ $f''(1) < 0$

$c)$ $f(1) \geq f(x), \forall x \in [0,1]$ $d)$ Cap de les anteriors.

4.32 Sigui f una funció derivable dues vegades a l'interval (a,b). Sigui $c \in (a,b)$ un punt que satisfà $f''(c) < 0$. Podem assegurar que és un màxim local ? i global ? Justifiqueu la resposta.

4.33 Sigui a un màxim local de f en l'interval $[2,3]$ i sigui b un mínim local de f en el mateix interval. Demostreu que és cert o doneu un contraexemple de cadascuna de les següents afirmacions:

$a)$ $f(a) \geq f(b)$ $b)$ $f(a) > f(2)$

$c)$ $f(a) > f(3)$ $d)$ $f(b) < f(2)$

4.34 Doneu amb el màxim de detall possible la gràfica de les següents funcions, coneixent prèviament totes les dades possibles (màxims, mínims, intervals de creixement, etc...).

$$a)\ f(x) = xe^x \qquad\qquad b)\ f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$c)\ f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \qquad\qquad d)\ f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$e)\ f(x) = \begin{cases} \frac{x}{(x-1)}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{e^x}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

4.35 Calculeu els màxims i mínims de les següents funcions definides a trossos en els dominis on estan definides.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & \text{si } x \in [0,1] \\ \frac{1}{x}, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} -(x+1), & \text{si } x \in [-3,-1) \\ (x+1)(x+2), & \text{si } x \in [-1,0) \\ (x-1)(x-2), & \text{si } x \in [0,1) \\ x-1, & \text{si } x \in [1,4]. \end{cases}$$

4.36 Una empresa produeix un cert bé en una quantitat q. Les funcions d'ingressos i cost són

$$I(q) = -\frac{6}{10^6}q^3 + \frac{18}{10^3}q^2 - 2q + 100$$
$$C(q) = \frac{2}{10^2}q^2 - 24q + 11000$$

a) Calculeu el valor de q que maximitza l'ingrés marginal, és a dir la funció derivada de l'ingrés.

b) Calculeu el valor de q que ens dóna benefici màxim (recordeu que el benefici ve donat per l'equació $B(q) = I(q) - C(q)$). Quin és el benefici màxim ?

4.37 Una empresa sap que ven 100 unitats d'un cert producte si ofereix un preu de 50 pessetes. A més també sap que un augment en el preu del producte d'una pesseta provoca un descens de les vendes de 5 unitats. Suposant que la funció de demanda és lineal i la funció de costos de l'empresa és $C(q) = q^2 + 10q + 100$ obtingueu la funció de demanda, és a dir, $p(q)$ i el preu que maximitza el benefici.

4.38 Calculeu el rectangle d'àrea màxima entre tots els que tenen perímetre fixat a.

4.39 La funció d'utilitat d'un cert consumidor és $u(x, y) = x^2y^4$. Maximitzeu el seva utilitat suposant que la seva restricció presupostària és $x + y = 1$.

4.40 Com és de tots conegut moltes empreses de begudes presenten el seu producte en llauna. Suposem que el volum de cada llauna és fixat pel mercat en un litre. Quines han de ser les dimensions de la llauna (que suposem cilíndrica) per tal de minimitzar la superfície (i d'aquesta manera el cost de producció per unitat)?

4.41 Tenim una corda d'un metre de longitud amb la qual volem tancar dues superfícies; una circular i l'altra quadrada. De quina manera haurem de tallar la corda per tal que la suma de les dues àrees sigui màxima? Interpreteu el resultat.

4.42 Sigui $P(x)$ un polinomi de grau $n \in \mathbb{N}$. Demostreu que la funció $|P(x)|$ assoleix sempre un mínim (és a dir un punt x_0 tal que $f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$).

4.43 Sigui f una funció derivable en x_0. Demostreu que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f^2(x) - f^2(x_0)}{(x - x_0)} = f'(x_0) \times 2f(x_0).$$

4.44 Calculeu la funció derivada de la funció $f(x) = (sinx)^{cosx}$.

4.45 Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Demostreu que és contínua i derivable en $x_0 = 0$. Podeu dir alguna cosa sobre la continuïtat o la derivabilitat fora de $x_0 = 0$?

4.46 Sigui f derivable en tot punt i complint que

$$\lim_{x\to\infty} xf'(x) = 0.$$

Proveu que $\lim_{x\to\infty}(f(3x+2) - f(x)) = 0$.

4.47 Demostreu que l'equació $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1,\ n \in \mathbb{N}$ té una única arrel positiva.

4.48 Calculeu les derivades d'ordre n de la funció $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

4.49 Demostreu si les següents funcions són derivables en $x_0 = 0$.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-1/x^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 + 3x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

4.50 Estudieu la continuïtat i la derivabilitat de la funció $f(x) = |x|/x$ en el punt $x_0 = 0$.

4.51 Construïu un exemple d'una funció contínua que sigui derivable en tot punt excepte en els punts $a_1 \ldots a_n,\ a_i \in \mathbb{R}\ \ \forall i = 1 \ldots n$.

4.52 Demostreu que l'equació $x^3 - 3x + k,\ k \in \mathbb{R}$ té com a molt una solució en $[-1, 1]$. Per a quins valors de k hi ha efectivament una solució?

4.53 Estudieu les següents afirmacions decidint si són certes o falses. Cas que siguin certes digueu quin argument feu servir i cas que siguin falses doneu un contraexemple.

a) Si f és una funció derivable en $\mathbb{R}$ i periòdica de periòde 2, amb $f'(1) = 0$ llavors $f'(3) = 0$.

b) La derivada n-èssima de la funció $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ en el punt $x = 0$ és $f^{(n)}(0) = n!$.

4.54 Diem que f és una funció parell si $f(-x) = f(x)$ i diem que f és una funció senar si $f(-x) = -f(x)$. Probeu o negueu les següents afirmacions.

a) Si f és senar i derivable amb $f'(3) = 7$ llavors $f'(-3) = 7$.

b) Si f és parell i derivable llavors $f'(0) = 0$.

c) Si f és parell i derivable la funció f' es senar

4.55 Demostreu que la funció $e^x - x = 1$ té exactament una única solució real.

4.56 Considerem la funció $f(x) = x^3 - x$. Calculeu les equacions de les rectes tangents a $f(x)$ paral.leles a l'eix de les abscisses.

4.57 Una pilota s'infla de manera que el seu volum creix a raó de $\pi \;\; cm^3/s$. Trobeu la variació del radi quan $r = 3$.

4.58 Dos vehicles recorren un mateix trajecte sense parar-se i surten i arriben al mateix temps. Demostreu que en algun instant llur velocitat és la mateixa.

4.59 Calculeu els extrems (màxims i mínims relatius) i els intervals de creixement i decreixement de les següents funcions en cada un dels següents dominis; $D = \mathbb{R}$, $D = [-1, 1]$, $D = (-\infty, 0)$, $D = (-2, -1) \cup [1, 3]$.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - x, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{si } x < -1 \\ -x, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{\ln x}{x}, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

4.60 Calculeu els punts d'inflexió i els intervals de concavitat i convexitat de les següents funcions en el domini $D = [-1, 1]$

$$a)\ f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$
$$b)\ f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x \leq 0 \\ x^2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4.61 Feu la gràfica de les següents funcions (en cap cas considereu la tŁcnica de fer una taula de valors ni res que si sembli.)

$$a)\ f(x) = |sinx|.$$
$$b)\ f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$$