

2.- Matrius. Determinants. Sistemes Lineals

1. Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1/3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2/3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

realitza les següents operacions:

- (a) $A+B$
- (b) $A-B$
- (c) $3A$
- (d) $1/2B - 1/3A$
- (e) $A \cdot B$
- (f) $B \cdot A$
- (g) $A \cdot C$
- (h) $B \cdot C$

2. Trianguleu mitjançant operacions elementals per files les següents matrius:

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1/2 \end{pmatrix}$
- (b) $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$
- (c) $\begin{pmatrix} -2 & -1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$
- (d) $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (e) $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 & 1/4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$
- (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
- (g) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

3. Calcula els següents determinants:

- (a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1/2 \end{vmatrix}$
- (b) $\begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & 1/3 \end{vmatrix}$
- (c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$
- (d) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$
- (e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
- (f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1/4 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$
- (g) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

4. Determina si les següents matrius tenen inversa o no.

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
- (b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
- (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1/2 \\ -1 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$

- (d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1/2 & -3 & -1/2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
- (e) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 \\ -2 & 8 & 6 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 12 & 11 & -3 \end{pmatrix}$

5. Calcula la inversa de les següents matrius, si és possible:

- (a) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & -1/4 \end{pmatrix}$
- (b) $\begin{pmatrix} -4 & 2/3 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$
- (c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1/2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$
- (d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- (e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

6. Determina el rang de les següents matrius:

- (a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$
- (b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- (c) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- (d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$
- (e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
- (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

7. Determina el rang de la següent matriu en funció del paràmetre a :

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & 2 & a \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$$

8. Expressen matricialment els següents sistemes d'equacions lineals, determineu via el teorema de Roché-Frobenius quins tenen solució i trobeu la solució dels sistemes compatibles utilitzant el mètode de Gauss:

$$(a) \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x - y - 2z = 2 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x - \frac{y}{2} + z = 1 \\ 2x + 3y - z = 6 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x + y + z = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - z = 1 \\ x - \frac{y}{4} + 2z = 1 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + t = 1 \\ x + z + t = 1 \\ y + z + t = 1 \end{cases}$$

5.- Calculeu els determinants de les següents matrius:

$$(a) A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad (b) A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & e & \pi \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (c) A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

6.- Calculeu $A_1 \pm A_1, A_3 \pm A_5, A_2 A_3, A_5 A_6, A_6 A_5, A_1 A_3$ ($A_i A_j$ denota el producte de les matrius) on

$$(a) A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \quad (c) A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(d) A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & \end{pmatrix} \quad (e) A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad (f) A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

7.- Determineu x, y essent

$$\begin{pmatrix} 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & x & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 11 & y & 8 \end{pmatrix}$$

8.- Resoleu l'equació $X \cdot A + B = C$ essent

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & . \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

9.- Resoleu l'equació $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$

10.- Calculeu les matrius commutables amb la $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11.- Resoleu l'equació $A \cdot X = X \cdot A$ essent $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

12.- Calculeu les matrius d'ordre 2 que verifiquin $A^2 = A$

13- Resol per Cramer:

$$(a) \begin{cases} x + 4y + 8z = 0 \\ -2x + 5y - 2z = 3 \\ 3x + 7y + z = 2 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x - 5y + 3z = -12 \\ 3x + 2y - 5z = 1 \\ 7x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 3x + 2y + 5z = -1 \\ 4x - y + z = 25 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x - 3y + z = -13 \\ 2x + 4y + 3z = 47 \\ 3x + 5y - 2z = 44 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 12 \\ x - y - z + t = -6 \\ x + y - z + t = -8 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} 5x - y = 7 \\ -x + 7y - z = 11 \\ -y + 3z - t = 17 \\ -z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x - y + z = 6 \\ x + y - z = 2 \\ x + y + z = 12 \end{cases}$$

14- Resol pel metode de Gauss:

$$(a) \begin{cases} 2x + 3y - 7z = -1 \\ 3x + 4y - 6z = 5 \\ 5x - 2y + 4z = -7 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ 5x - y - 2z = 2 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x - y + z = 6 \\ x + y - z = 2 \\ x + y + z = 12 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2x - 5y + 3z = -12 \\ 3x + 2y - 5z = 1 \\ 7x - 4y + 2z = 9 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 3x + y - 5z = 2 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x - y = 23 \\ 2x + 25y = -6 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} 2x + y + 3z + t = 4 \\ 3x - 2y + z + 5t = 2 \\ x + 2y - 3z + 11t = 2 \end{cases}$$