Macroeconomía Avanzada II

Capítulo 3

Modelo de generaciones sucesivas

1

INTRODUCCION

- El modelo de Ramsey nos permitía analizar las consecuencias que para el crecimiento del producto y del consumo tiene el progreso técnico y la política fiscal.
- El modelo de Ramsey se basa en el supuesto de agentes que viven un número infinito de períodos. Este supuesto es equivalente a considerar dinastías que están ligadas unas a otras por altruismo.
- El modelo de generaciones sucesivas supone que el horizonte temporal de optimización es finito.

2

INTRODUCCION

- El modelo de Ramsey se puede representar como:

período (t)

generación (t)	Nº	0	1	2	3	4	5	…
0	$L(0)$	$c(0)$	$c(1)$	$c(2)$	$c(3)$	$c(4)$	$c(5)$	…
1	$nL(0)$		$c(1)$	$c(2)$	$c(3)$	$c(4)$	$c(5)$	…
2	$nL(1)$			$c(2)$	$c(3)$	$c(4)$	$c(5)$	…
…	…				…	…	…	…

INTRODUCCION

- El modelo de generaciones sucesivas se puede representar como:

período (t)

generación (t)	Nº	0	1	2	3	4	5	…
0	L_0	c_{10}	c_{21}					
1	L_1		c_{11}	c_{22}				
2	L_2			c_{12}	c_{23}			
…	…						…	…

AGENTES: CONSUMIDORES

- La unidad de decisión es el *individuo*. El número de individuos crece a la tasa n.
- Cada individuo quiere maximizar su bienestar.
- Para ello, eligen la mejor asignación de recursos entre todas las que pueden financiar (restricción presupuestaria)

Restricción presupuestaria

usos de renta = fuentes de renta

AGENTES: CONSUMIDORES

- *Restricción presupuestaria*
- Cada individuo vive dos períodos. En el primero el agente trabaja. Con su renta el agente consume y ahorra. En el segundo el agente no trabaja y consume su ahorro.

$$c_{1t} + s_{t+1} = w_t E_t \,;\;\; c_{2t+1} = (1 + R_{t+1}) s_{t+1}$$

- w_t = salario por unidad de eficiencia
- E_t = unidades de eficiencia per cápita
- c_{1t} = consumo en primer período de vida
- c_{2t+1} = consumo en segundo período de vida
- s_{t+1} = ahorro
- R_{t+1} = tipo de interés que remunera el ahorro

AGENTES: CONSUMIDORES

- *Preferencias*
- Cada individuo tiene unas preferencias:

$$u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1}) \; ; \qquad 0 < \beta < 1$$

$\Rightarrow$ maximizar el bienestar del individuo

AGENTES: CONSUMIDORES

- *Problema*: Dado w_t, R_{t+1} cada individuo decide c_{1t}, c_{2t+1} para maximizar su bienestar

$$u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1})$$

sujeto a

$$c_{1t} + s_{t+1} = w_t E_t$$

$$c_{2t+1} = (1 + R_{t+1}) s_{t+1}$$

$$c_{1t} \geq 0; \; c_{2t+1} \geq 0$$

AGENTES: CONSUMIDORES

- *Problema*: Dado w_t, R_{t+1} cada individuo decide c_{1t}, c_{2t+1} para maximizar su bienestar

$$u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1})$$

sujeto a

$$c_{1t} + s_{t+1} = w_t E_t \longrightarrow c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1+R_{t+1}} = w_t E_t$$

$$c_{2t+1} = (1 + R_{t+1}) s_{t+1} \longrightarrow s_{t+1} = \frac{c_{2t+1}}{1+R_{t+1}}$$

$$c_{1t} \geq 0; \; c_{2t+1} \geq 0$$

Capítulo 3: Modelo de generaciones sucesivas

AGENTES: CONSUMIDORES

- *Problema*: Dado w_t, R_{t+1} cada individuo decide c_{1t}, c_{2t+1} para maximizar su bienestar

$$u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1})$$

sujeto a

$$c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1+R_{t+1}} = w_t E_t$$

$$c_{1t} \geq 0; \; c_{2t+1} \geq 0$$

AGENTES: EMPRESAS

- *Problema*: Las empresas observan la secuencia de precios $\{w_t, r_t\}$ y deciden la secuencia de demandas de factores $\{N_t, K_t\}$ para maximizar beneficios

$$F(N_t, K_t) - w_t N_t - r_t K_t$$

  - N_t = demanda de trabajo
  - K_t = demanda de capital
  - r_t = coste del capital

EQUILIBRIO COMPETITIVO: DEFINICION

- *Definición*: un equilibrio competitivo es una secuencia de precios $\{w_t, r_t, R_t\}$ y de asignaciones $\{c_{1t}, c_{2t+1}, k_t\}$ tal que
  - dados los precios, la secuencia $\{c_{1t}, c_{2t+1}\}$ resuelve el problema de cada consumidor nacido en t
  - los viejos en $t = 0$ maximizan su utilidad
  - dados los precios, la secuencia $\{N_t, K_t\}$ resuelve el problema de las empresas
  - los mercados se vacían
  - no hay oportunidades de arbitraje entre distintas formas de inversión

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- *¿Cuál es la secuencia* $\{c_{1t}, c_{2t+1}, s_{t+1}\}$ *que resuelve el problema del consumidor?*

$$\max u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1})$$

sujeto a

$$c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1+R_{t+1}} = w_t E_t$$

$$c_{1t} \geq 0; \; c_{2t+1} \geq 0$$

$$s_{t+1} = w_t E_t - c_{1t}$$

Capítulo 3: Modelo de generaciones sucesivas

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- *¿Cuál es la secuencia* $\{c_{1t}, c_{2t+1}, s_{t+1}\}$ *que resuelve el problema del consumidor?*

$$L(c_{1t}, c_{2t+1}, \lambda) = u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1}) - \lambda\left[c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1+R_{t+1}} - w_t E_t\right]$$

Condiciones de primer orden

$$u'(c_{1t}) = \lambda$$

$$\beta u'(c_{2t+1}) = \frac{\lambda}{1+R_{t+1}}$$

$$c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1+R_{t+1}} = w_t E_t$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- *La secuencia* $\{c_{1t}, c_{2t+1}, s_{t+1}\}$ *que resuelve el problema del consumidor ha de cumplir*

$$u'(c_{1t}) = \beta u'(c_{2t+1})(1+R_{t+1})$$

$$c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1+R_{t+1}} = w_t E_t$$

$$s_{t+1} = w_t E_t - c_{1t} = \frac{c_{2t+1}}{1+R_{t+1}}$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- Ejemplo

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}\left[= \ln(c), \text{si } \theta = 1\right]$$

$$u'(c_{1t}) = \beta u'(c_{2t+1})(1+R_{t+1}) \longrightarrow c_{1t}^{-\theta} = \beta c_{2t+1}^{-\theta}(1+R_{t+1})$$

$$\downarrow$$

$$c_{2t+1} = c_{1t}\left[\beta(1+R_{t+1})\right]^{1/\theta}$$

$$\downarrow$$

$$c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1+R_{t+1}} = w_t E_t \longrightarrow c_{1t} + \frac{c_{1t}\left[\beta(1+R_{t+1})\right]^{1/\theta}}{1+R_{t+1}} = w_t E_t$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- Ejemplo

$$c_{1t} + \frac{c_{1t}\left[\beta(1+R_{t+1})\right]^{1/\theta}}{1+R_{t+1}} = w_t E_t$$

$$\downarrow$$

$$c_{1t}\left[1+\frac{\left[\beta(1+R_{t+1})\right]^{1/\theta}}{1+R_{t+1}}\right] = w_t E_t$$

$$\downarrow$$

$$c_{1t} = \left[\frac{1+R_{t+1}}{1+R_{t+1}+\left[\beta(1+R_{t+1})\right]^{1/\theta}}\right] w_t E_t$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- Ejemplo

$$c_{1t} = \left[\frac{1+R_{t+1}}{1+R_{t+1}+\left[\beta(1+R_{t+1})\right]^{1/\theta}}\right] w_t E_t$$

$$s_{t+1} = w_t E_t - c_{1t} = w_t E_t - \left[\frac{1+R_{t+1}}{1+R_{t+1}+\left[\beta(1+R_{t+1})\right]^{1/\theta}}\right] w_t E_t$$

$$= \left[1-\frac{1+R_{t+1}}{1+R_{t+1}+\left[\beta(1+R_{t+1})\right]^{1/\theta}}\right] w_t E_t$$

$$= \left[\frac{\left[\beta(1+R_{t+1})\right]^{1/\theta}}{1+R_{t+1}+\left[\beta(1+R_{t+1})\right]^{1/\theta}}\right] w_t E_t$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- Ejemplo

$$c_{1t} = \left[\frac{1+R_{t+1}}{1+R_{t+1} + \left[\beta(1+R_{t+1})\right]^{1/\theta}} \right] w_t E_t$$

$$s_{t+1} = \left[\frac{\left[\beta(1+R_{t+1})\right]^{1/\theta}}{1+R_{t+1} + \left[\beta(1+R_{t+1})\right]^{1/\theta}} \right] w_t E_t$$

$$c_{2t+1} = (1+R_{t+1})s_{t+1} = (1+R_{t+1})\left[\frac{\left[\beta(1+R_{t+1})\right]^{1/\theta}}{1+R_{t+1} + \left[\beta(1+R_{t+1})\right]^{1/\theta}} \right] w_t E_t$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- *La secuencia* $\{c_{1t}, c_{2t+1}, s_{t+1}\}$ *que resuelve el problema del consumidor ha de cumplir*

$$s_{t+1} = \sigma(R_{t+1}) w_t E_t$$

$$c_{1t} = \left[1 - \sigma(R_{t+1})\right] w_t E_t$$

$$c_{2t+1} = (1+R_{t+1})\sigma(R_{t+1}) w_t E_t$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- *¿Cuál es el valor* c_{20} *que maximiza la utilidad de los viejos en* $t = 0$*?*

$$c_{20} = (1 + R_0)\frac{K_0}{L_{-1}}$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- *¿Cuál es la secuencia* $\{K_t, N_t\}$ *que resuelve el problema de las empresas?*

$$f(k_t) - w_t - r_t k_t$$

Condiciones de primer orden

$$f'(k_t) = r_t$$

$$w_t = f(k_t) - f'(k_t)k_t$$

$$f(k_t) = y_t \,;\, N_t = E_t L_t \,;\, K_t = k_t N_t$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- *¿Cuándo se vacían los mercados?*

Mercado de bienes

$$L_t c_{1t} + L_{t\text{-}1} c_{2t} + I_t = F[K_t, N_t]$$
$$\downarrow$$
$$L_t c_{1t} + L_{t\text{-}1} c_{2t} + K_{t+1} - (1 - \delta) K_t = F[K_t, N_t]$$

Mercado de capitales

$$K_{t+1} = L_t s_{t+1}$$

Capítulo 3: Modelo de generaciones sucesivas

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- *¿Cuándo no existen oportunidades de arbitraje?*

$$R_t = r_t - \delta$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: DINAMICA DE K

- *¿Cómo evoluciona el capital en esta economía?*

Vaciado del mercado de capitales

$$K_{t+1} = L_t s_{t+1}$$

Optimización consumidor $\downarrow$ $s_{t+1} = \sigma(R_{t+1}) w_t E_t$

$$K_{t+1} = \sigma(R_{t+1}) w_t E_t L_t$$

$$\downarrow$$

$$\frac{E_{t+1}L_{t+1}}{E_t L_t} \frac{K_{t+1}}{E_{t+1}L_{t+1}} = \frac{\sigma(R_{t+1}) w_t E_t L_t}{E_t L_t}$$

Capítulo 3: Modelo de generaciones sucesivas

EQUILIBRIO COMPETITIVO: DINAMICA DE K

- *¿Cómo evoluciona el capital en esta economía?*

$$\frac{E_{t+1}L_{t+1}}{E_t L_t} \frac{K_{t+1}}{E_{t+1}L_{t+1}} = \frac{\sigma(R_{t+1}) w_t E_t L_t}{E_t L_t}$$

$$\downarrow$$

$$(1 + g + n) k_{t+1} = \sigma(R_{t+1}) w_t$$

No arbitraje $\downarrow$ $R_{t+1} = r_{t+1} - \delta$

$$(1 + g + n) k_{t+1} = \sigma(r_{t+1} - \delta) w_t$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: DINAMICA DE *K*

- *¿Cómo evoluciona el capital en esta economía?*

$$(1+g+n)k_{t+1} = \sigma(r_{t+1}-\delta)w_t$$

Optimización empresas $\downarrow$

$$r_{t+1} = f'(k_{t+1})$$
$$w_t = f(k_t) - f'(k_t)k_t$$

$$(1+g+n)k_{t+1} = \sigma\left[f'(k_{t+1})-\delta\right]\left[f(k_t)-f'(k_t)k_t\right]$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{k_{t+1} = \frac{\sigma\left[f'(k_{t+1})-\delta\right]}{(1+g+n)}\left[f(k_t)-f'(k_t)k_t\right]}$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: DINAMICA DE *K*

- *¿Cómo evoluciona el capital en esta economía?*

$$\boxed{k_{t+1} = \frac{\sigma\left[f'(k_{t+1})-\delta\right]}{(1+g+n)}\left[f(k_t)-f'(k_t)k_t\right]}$$

  - El equilibrio competitivo se caracteriza por una ecuación en diferencias en el capital por unidad de eficiencia. Esta ecuación determina la secuencia óptima $\{k_t\}$ a partir del capital inicial k_0.

  - El resto de variables pueden generarse a partir de la secuencia para el capital por unidad de eficiencia.

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CALCULO

- A partir de la secuencia para el capital por unidad de eficiencia $\{kt\}$ se puede calcular:
  - precios:

$\boxed{r_t = f'(k_t)}$ $\boxed{w_t = f(k_t) - f'(k_t)k_t}$ $\boxed{R_t = r_t - \delta}$

  - consumo per cápita jóvenes

$$\boxed{c_{1t} = [1+\sigma(1+R_{t+1})]w_t E_t}$$

  - consumo per cápita viejos

$$\boxed{c_{2t} = (1+R_t)\sigma(1+R_t)w_{t-1}E_{t-1}}$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: DINAMICA DE *K*

- Ejemplo

$$u(c) = \ln(c) \qquad f(k) = k^{\alpha}$$

$$\boxed{k_{t+1} = \frac{\sigma(R_{t+1})}{(1+g+n)}\left[f(k_t) - f'(k_t)k_t\right]}$$

$$\sigma(R_{t+1}) = \frac{\left[\beta(1+R_{t+1})\right]^{1/\theta}}{1+R_{t+1}+\left[\beta(1+R_{t+1})\right]^{1/\theta}} = \frac{\beta}{1+\beta}$$

$$f(k_t) - f'(k_t)k_t = k_t^{\alpha} - \alpha k_t^{\alpha-1}k_t = (1-\alpha)k_t^{\alpha}$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: DINAMICA DE *K*

- Ejemplo

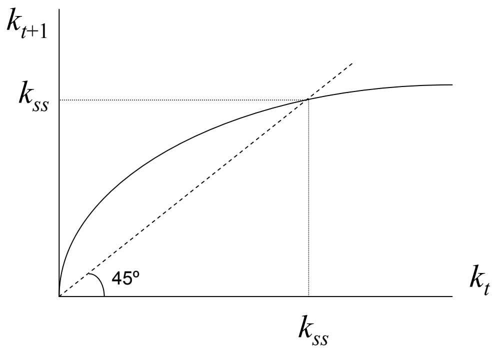
$$u(c) = \ln(c) \qquad f(k) = k^{\alpha}$$

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+g+n)} \frac{\beta}{(1+\beta)} (1-\alpha) k_t^{\alpha}$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: DINAMICA DE *K*

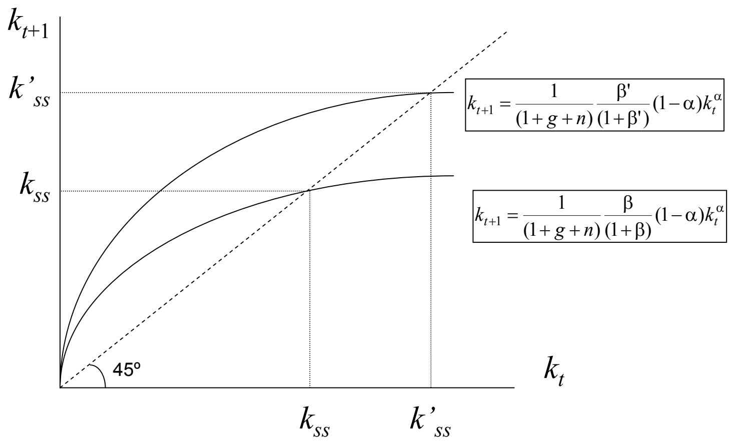
- Ejemplo $u(c) = \ln(c); \qquad f(k) = k^{\alpha}$

$$\boxed{k_{t+1} = \frac{1}{(1+g+n)} \frac{\beta}{(1+\beta)} (1-\alpha) k_t^{\alpha}}$$



EQUILIBRIO COMPETITIVO: CAMBIO EN β

- Ejemplo $\quad u(c) = \ln(c); \qquad f(k) = k^{\alpha} \qquad \beta' > \beta$



EQUILIBRIO COMPETITIVO: DINAMICA DE K

- Ineficiencia dinámica
  - Ahora nos podemos preguntar si el equilibrio competitivo es eficiente. Para responder a esta pregunta es necesario tener una idea de las características de las asignaciones eficientes en esta economía.
  - Dado que hay distintos agentes en cada período, en vez de caracterizar las asignaciones eficientes, vamos a calcular una condición necesaria para que una asignación sea eficiente.
  - Después demostraremos que la asignación del equilibrio competitivo puede violar esta condición

EQUILIBRIO COMPETITIVO: DINAMICA DE K

- Ineficiencia dinámica
  - Primero calculamos el capital de la regla de oro. Para ello supondremos que no hay progreso técnico ($g = 0$).
  - La condición de factibilidad es

$$L_t c_{1t} + L_{t-1} c_{2t} + K_{t+1} - (1 - \delta) K_t = F[K_t, N_t]$$

$$\downarrow$$

$$c_{1t} + \frac{L_{t-1}}{L_t} c_{2t} + \frac{K_{t+1}}{L_t} - (1-\delta)\frac{K_t}{L_t} = \frac{F[K_t, N_t]}{L_t}$$

Capítulo 3: Modelo de generaciones sucesivas

EQUILIBRIO COMPETITIVO: DINAMICA DE K

- Ineficiencia dinámica

$$c_{1t} + \frac{L_{t-1}}{L_t} c_{2t} + \frac{K_{t+1}}{L_t} - (1-\delta)\frac{K_t}{L_t} = \frac{F[K_t, N_t]}{L_t}$$

$$\downarrow$$

$$c_{1t} + \frac{1}{(1+n)} c_{2t} + (1+n) k_{t+1} - (1-\delta) k_t = f(k_t)$$

  - El término $c_{1t} + c_{2t}/(1+n)$ es el consumo que genera cada trabajador para los jóvenes y viejos. Lo vamos a llamar ct e indica cuantos recursos dedica a consumo la economía en su conjunto.

$$c_t + (1+n) k_{t+1} - (1-\delta) k_t = f(k_t)$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: DINAMICA DE *K*

- Ineficiencia dinámica

$$c_t + (1+n)k_{t+1} - (1-\delta)k_t = f(k_t)$$

  - En el estado estacionario $k_t = k_{t+1}$. Sustituyendo…

$$c_t = f(k_t) - (\delta + n)k_t$$

  - Ahora podemos calcular el valor de k_t que maximiza el consumo en el estado estacionario (regla de oro), derivando respecto a k e igualando a 0.

$$f'(k_{RO}) = \delta + n$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: DINAMICA DE *K*

- Ineficiencia dinámica
  - Por otro lado, en el ejemplo anterior con utilidad logarítmica y función de producción Cobb-Douglas la evolución del capital venía dada por

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+g+n)} \frac{\beta}{(1+\beta)} (1-\alpha) k_t^{\alpha}$$

  - Imponiendo nuevamente $k_t = k_{t+1}$, podemos calcular el estado estacionario del equilibrio competitivo

$$k_{ss} = \left[\frac{1}{(1+g+n)} \frac{\beta}{(1+\beta)} (1-\alpha) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: DINAMICA DE *K*

- Ineficiencia dinámica
  - Comparando el capital de la regla de oro…

$$k_{RO} = \left(\frac{\alpha}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

  - …con el capital del estado estacionario en el equilibrio competitivo…

$$k_{ss} = \left[\frac{1}{(1+g+n)}\frac{\beta}{(1+\beta)}(1-\alpha)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

  - …vemos que no necesariamente uno es siempre mayor que el otro.

Capítulo 3: Modelo de generaciones sucesivas

EQUILIBRIO COMPETITIVO: DINAMICA DE *K*

- Ineficiencia dinámica
  - Por ejemplo, cuando α es pequeño…

$$k_{RO} = \left(\frac{\alpha}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} < \left[\frac{1}{(1+n)}\frac{\beta}{(1+\beta)}(1-\alpha)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = k_{ss}$$

  - Esta asignación del equilibrio competitivo es ineficiente. Un planificador haría que la generación vieja de un periodo consumiese la diferencia $k_{ss} - k_{RO}$ y la economía podría mantener niveles de consumo permanentemente más altos.

EQUILIBRIO COMPETITIVO: DINAMICA DE *K*

- Caso general

$$\boxed{k_{t+1}=\frac{1}{(1+g+n)}\sigma[f'(k_{t+1})-\delta]\frac{[f(k_t)-f'(k_t)k_t]}{f(k_t)}f(k_t)}$$

$$\Rightarrow k_{t+1}=\phi(k_t)$$

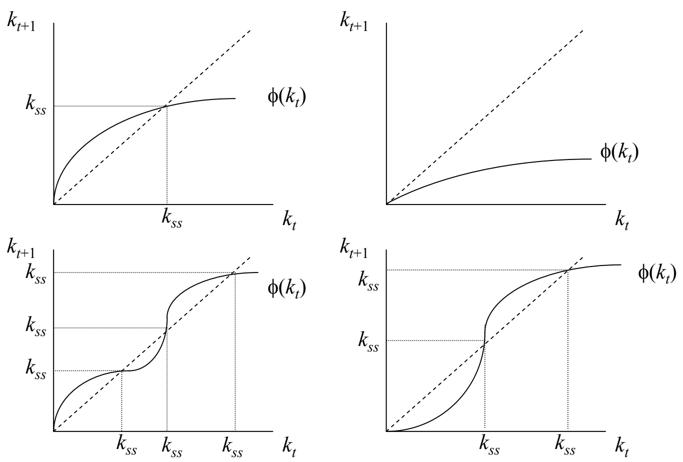
- $\phi(0)=0$
- $\phi(k_t)<k_t \text{ si } k_t\rightarrow\infty$

  $-\,k_{t+1}<f(k_t)$

  $-\,f(k_t)<k_t \text{ si } k_t\rightarrow\infty$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: DINAMICA DE *K*

- Caso general



POLITICA FISCAL: SEGURIDAD SOCIAL

- Ahora analizaremos las consecuencias sobre la asignación de recursos de introducir un gobierno que lleva a cabo una política fiscal.
- Dadas las características del modelo de generaciones solapadas, esta política fiscal tendrá la forma de un sistema de pensiones.
- El sistema de pensiones de la Seguridad Social en la mayoría de los países consiste en transferencias intergeneracionales de jóvenes a viejos. A este sistema se le denomina *de reparto*.

POLITICA FISCAL: SEGURIDAD SOCIAL

- En un sistema de reparto se recaudan impuestos de los trabajadores que se reparten entre los jubilados. La idea es prometer a los trabajadores que cuando se jubilen se recaudarán impuestos a los trabajadores en el futuro para devolverles lo que han pagado en la actualidad.
- Evidentemente, este sistema funciona si la fuerza laboral no disminuye mucho en el tiempo. Si disminuyese mucho el número de personas que contribuye al sistema caería en relación al número de personas que reciben fondos del sistema.

POLITICA FISCAL: SEGURIDAD SOCIAL

- En nuestro modelo vamos a suponer que cada trabajador ha de pagar un impuesto de suma fija de T unidades.

- El gobierno recauda este impuesto y lo reparte de forma igualitaria entre los viejos que viven en el mismo período. Por lo tanto, el gobierno no incurre en déficits ni superávits. Esto quiere decir que cada viejo recibe en su segundo período de vida una transferencia igual a:

$$transferencia = (1 + n)T$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: SEGURIDAD SOCIAL

- *Definición*: un equilibrio competitivo con seguridad social es una política fiscal, T, secuencia de precios $\{w_t, r_t, R_t\}$ y de asignaciones $\{c_{1t}, c_{2t+1}, k_t\}$ tal que
  - dados los precios y la política fiscal, la secuencia $\{c_{1t}, c_{2t+1}\}$ resuelve el problema de cada consumidor nacido en t
  - los viejos en $t = 0$ maximizan su utilidad
  - dados los precios, la secuencia $\{N_t, K_t\}$ resuelve el problema de las empresas
  - los mercados se vacían
  - no hay oportunidades de arbitraje entre distintas formas de inversión

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- *¿Cuál es la secuencia* $\{c_{1t}, c_{2t+1}, s_{t+1}\}$ *que resuelve el problema del consumidor?*

$$\max\ u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1})$$

sujeto a

$$c_{1t} + s_{t+1} = w_t E_t - T$$

$$c_{2t+1} = (1 + R_{t+1}) s_{t+1} + (1 + n) T$$

$$c_{1t} \geq 0;\ c_{2t+1} \geq 0$$

Capítulo 3: Modelo de generaciones sucesivas

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- *¿Cuál es la secuencia* $\{c_{1t}, c_{2t+1}, s_{t+1}\}$ *que resuelve el problema del consumidor?*

$$\max\ u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1})$$

sujeto a

$$c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1 + R_{t+1}} = w_t E_t - T + \frac{(1+n)T}{1 + R_{t+1}}$$

$$c_{1t} \geq 0;\ c_{2t+1} \geq 0$$

$$s_{t+1} = w_t E_t - T - c_{1t}$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- *¿Cuál es la secuencia* $\{c_{1t}, c_{2t+1}, s_{t+1}\}$ *que resuelve el problema del consumidor?*

$$L(c_{1t}, c_{2t+1}, \lambda) = u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1}) -$$
$$-\lambda\left[c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1+R_{t+1}} - w_t E_t + T - \frac{(1+n)T}{1+R_{t+1}}\right]$$

Condiciones de primer orden

$$u'(c_{1t}) = \lambda$$
$$\beta u'(c_{2t+1}) = \frac{\lambda}{1+R_{t+1}}$$
$$c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1+R_{t+1}} = w_t E_t - T + \frac{(1+n)T}{1+R_{t+1}}$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- *La secuencia* $\{c_{1t}, c_{2t+1}, s_{t+1}\}$ *que resuelve el problema del consumidor ha de cumplir*

$$u'(c_{1t}) = \beta u'(c_{2t+1})(1+R_{t+1})$$

$$c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1+R_{t+1}} = w_t E_t - T + \frac{(1+n)T}{1+R_{t+1}} = w_t E_t + \frac{(n-R_{t+1})T}{1+R_{t+1}}$$

$$s_{t+1} = w_t E_t - T - c_{1t} = \frac{c_{2t+1} - (1+n)T}{1+R_{t+1}}$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- Ejemplo

$$u(c) = \ln(c); \qquad f(k) = k^{\alpha}; \qquad E_t = 1$$

$$u'(c_{1t}) = \beta u'(c_{2t+1})(1+R_{t+1}) \longrightarrow c_{1t}^{-1} = \beta c_{2t+1}^{-1}(1+R_{t+1})$$

$$c_{2t+1} = c_{1t}\beta(1+R_{t+1})$$

Capítulo 3: Modelo de generaciones sucesivas

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- Ejemplo

$$u(c) = \ln(c); \qquad f(k) = k^{\alpha}; \qquad E_t = 1$$

$$u'(c_{1t}) = \beta u'(c_{2t+1})(1+R_{t+1}) \longrightarrow c_{2t+1} = c_{1t}\beta(1+R_{t+1})$$

$$c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1+R_{t+1}} = w_t + \frac{(n-R_{t+1})T}{1+R_{t+1}}$$

$$c_{1t} + \frac{c_{1t}\beta(1+R_{t+1})}{1+R_{t+1}} = w_t + \frac{(n-R_{t+1})T}{1+R_{t+1}}$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- Ejemplo

$$c_{1t} + \frac{c_{1t}\beta(1+R_{t+1})}{1+R_{t+1}} = w_t + \frac{(n-R_{t+1})T}{1+R_{t+1}}$$

$$\downarrow$$

$$c_{1t}(1+\beta) = w_t + \frac{(n-R_{t+1})T}{1+R_{t+1}}$$

$$\downarrow$$

$$c_{1t} = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left[w_t + \frac{(n-R_{t+1})T}{1+R_{t+1}}\right]$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- Ejemplo

$$c_{1t} = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left[w_t + \frac{(n-R_{t+1})T}{1+R_{t+1}}\right]$$

$$s_{t+1} = w_t - T - c_{1t} = w_t - T - \left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left[w_t + \frac{(n-R_{t+1})T}{1+R_{t+1}}\right]$$

$$= \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)w_t - T\left[1 + \left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left(\frac{n-R_{t+1}}{1+R_{t+1}}\right)\right]$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- Ejemplo

$$c_{1t} = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left[w_t + \frac{(n-R_{t+1})T}{1+R_{t+1}}\right]$$

$$s_{t+1} = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)w_t - T\left[1+\left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left(\frac{n-R_{t+1}}{1+R_{t+1}}\right)\right]$$

$$c_{2t+1} = \beta(1+R_{t+1})c_{1t} = (1+R_{t+1})\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\left[w_t + \frac{(n-R_{t+1})T}{1+R_{t+1}}\right]$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- *¿Cuál es el valor c_{20} que maximiza la utilidad de los viejos en $t = 0$?*

$$c_{20} = (1+R_0)\frac{K_0}{L_{-1}} + (1+n)T$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- *¿Cuál es la secuencia* $\{K_t, N_t\}$ *que resuelve el problema de las empresas?*

$$k_t^{\alpha} - w_t - r_t k_t$$

Condiciones de primer orden

$$f'(k_t) = \alpha k_t^{\alpha} = r_t$$

$$w_t = f(k_t) - f'(k_t)k_t = (1-\alpha)k_t^{\alpha}$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- *¿Cuándo se vacían los mercados?*

Mercado de bienes

$$L_t c_{1t} + L_{t\text{-}1} c_{2t} + I_t = F[K_t, N_t]$$

$$\downarrow$$

$$L_t c_{1t} + L_{t\text{-}1} c_{2t} + K_{t+1} - (1-\delta)K_t = F[K_t, N_t]$$

Mercado de capitales

$$K_{t+1} = L_t s_{t+1}$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: CARACTERIZACION

- *¿Cuándo no existen oportunidades de arbitraje?*

$$R_t = r_t - \delta$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: DINAMICA DE *K*

- *¿Cómo evoluciona el capital en esta economía?*

Vaciado del mercado de capitales

$$K_{t+1} = L_t s_{t+1}$$

$$\downarrow$$

$$(1+n)k_{t+1} = s_{t+1} = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)w_t - T\left[1+\left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left(\frac{n-R_{t+1}}{1+R_{t+1}}\right)\right]$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: DINAMICA DE *K*

- *¿Cómo evoluciona el capital en esta economía?*

$$(1+n)k_{t+1} = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)w_t - T\left[1+\left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left(\frac{n-R_{t+1}}{1+R_{t+1}}\right)\right]$$

$$\downarrow$$

$$(1+n)k_{t+1} = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)w_t - T\left[1+\left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left(\frac{n-r_{t+1}+\delta}{1+r_{t+1}-\delta}\right)\right]$$

$$\downarrow$$

$$(1+n)k_{t+1} = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)(1-\alpha)k_t^{\alpha} - T\left[1+\left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left(\frac{n-\alpha k_{t+1}^{\alpha}+\delta}{1+\alpha k_{t+1}^{\alpha}-\delta}\right)\right]$$

EQUILIBRIO COMPETITIVO: DINAMICA DE *K*

- *¿Cómo evoluciona el capital en esta economía?*

$$(1+n)k_{t+1} = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)(1-\alpha)k_t^{\alpha} - T\left[1+\left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left(\frac{n-\alpha k_{t+1}^{\alpha}+\delta}{1+\alpha k_{t+1}^{\alpha}-\delta}\right)\right]$$

- Podemos calcular el capital en el estado estacionario haciendo $k_t = k_{t+1} = k_{ss}$

$$(1+n)k_{ss} = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)(1-\alpha)k_{ss}^{\alpha} - T\left[1+\left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left(\frac{n-\alpha k_{ss}^{\alpha}+\delta}{1+\alpha k_{ss}^{\alpha}-\delta}\right)\right]$$

- Vemos que k_{ss} depende del impuesto

EQUILIBRIO COMPETITIVO: DINAMICA DE *K*

- *¿Cómo evoluciona el capital en esta economía?*

$$(1+n)k_{ss} = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)(1-\alpha)k_{ss}^{\alpha} - T\left[1+\left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left(\frac{n-\alpha k_{ss}^{\alpha}+\delta}{1+\alpha k_{ss}^{\alpha}-\delta}\right)\right]$$

  - Vemos que k_{ss} depende del impuesto: el gobierno obliga a los individuos a invertir en un activo (pensiones de la Seguridad Social) que producen una rentabilidad igual a n cuando el mercado paga R_{t+1}