Macroeconomia Avanzada II
Preguntas de exámenes pasados

Problema 1. Cambios en el gasto público

Considere el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans de horizonte infinito y tiempo continuo. La tasa de crecimiento de la población es $n > 0$. Cada agente tiene una tasa de descuento intertemporal de $\rho > 0$. La función de producción intensiva (per cápita) es $f(k)$, donde k representa el capital per cápita. El capital se deprecia a una tasa $\delta > 0$. El gobierno gasta una cantidad $G(t)$ *per cápita* y obliga a los agentes a pagar impuestos $T(t)$ *per cápita*. No hay crecimiento exógeno de la productividad. El Planificador Social de esta economía tiene unas preferencias iguales a

$$\int_0^\infty e^{-(\rho-n)t}\left\{u(c(t)) + v(G(t))\right\} dt.$$

1. (10 puntos) Escriba el problema de decisión del Planificador Social.

2. (10 puntos) Caracterice la solución del Problema del Planificador Social como un sistema de ecuaciones diferenciales en k y c. Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones diferenciales, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones diferenciales.

3. (10 puntos) ¿Cómo se relaciona la asignación que resuelve el Problema del Planificador Social con la asignación del equilibrio competitivo? ¿Depende la respuesta a la pregunta anterior de cómo se financia el gasto público?

4. (10 puntos) Asuma que la economía se encuentra inicialmente en un equilibrio estacionario y que el gobierno financia el gasto con impuestos de suma fija ($G(t) = T(t)$ para todo t, por lo que nunca hay deuda pública). Discuta los efectos a corto y largo plazo sobre el consumo, salarios, tipo de interés de una **disminución permanente** del gasto público.

5. (10 puntos) Asuma que la economía se encuentra inicialmente en un equilibrio estacionario y de que el gobierno financia el gasto con impuestos de suma fija ($G(t) = T(t)$ para todo t, por lo que nunca hay deuda pública). Discuta los efectos a corto y largo plazo sobre el consumo, salarios, tipo de interés de un **disminución temporal** del gasto público.

Problema 2. Política Fiscal en el modelo de generaciones sucesivas

Considere el modelo de generaciones sucesivas con producción de Diamond (1965). Los individuos nacidos en t maximizan la función de utilidad

$$\log(c_{1,t}) + \beta \log(c_{2,t+1}) + v(G_t, G_{t+1}),$$

donde G_t representa el gasto del gobierno por trabajador en t, $c_{1,t}$ representa el consumo de un joven de la generación t en el período t, $c_{2,t+1}$ representa el consumo de un viejo de la generación t en el período $t+1$ y v es una función cualquiera. Los individuos sólo trabajan cuando son jóvenes. La tasa de crecimiento de la población es n. La función de producción está dada por $F(K_t, L_t) = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$. No hay progreso técnico o crecimiento de la productividad en la economía. El capital se deprecia a una tasa $\delta > 0$. El gobierno financia el gasto con impuestos de suma fija cobrados a los **viejos**. La recaudación fiscal coincide con el gasto, por lo cual no hay deuda pública. La restricción presupuestaria del gobierno en el período t está dada por $G_t L_t = T_t L_{t-1}$. AYUDA: recuerde que G_t representa el gasto por trabajador en t, L_t el número de trabajadores en t (tamaño de la generación nacida en t), y T_t denota los impuestos pagados en el perído t por cada uno de los viejos en t (los cuales nacieron en el período $t-1$).

1. (5 puntos) Escriba el problema del consumidor nacido en t.

2. (5 puntos) Defina un equilibrio competitivo.

3. (10 puntos) Resuelva el problema del consumidor nacido en t. Es decir obtenga una expresión del consumo cuando joven y viejo y del ahorro ($c_{1,t}$, $c_{2,t+1}$, y s_{t+1}) en función de w_t, R_{t+1}, y T.

4. (10 puntos) Encuentre una ecuación en diferencias en términos del capital por trabajador ($k_t = K_t/L_t$) que caracteriza el equilibrio competitivo.

5. (10 puntos) Considere el caso $G_t = T_t = 0$ para todo t. Encuentre una expresión para el capital por trabajador del equilibrio estacionario (k^*) y represente gráficamente la evolución de la economía a partir de un capital inicial k_0 inferior a k^*. AYUDA: Considere la ecuación en diferencias del aparatado anterior para el caso especial en que $G_t = T_t = 0$.

6. (10 puntos) Considere una economía en que el gasto público (por trabajador) es constante e igual a un valor $G > 0$. ¿El capital del equilibrio estacionario es mayor en la economía con $G > 0$ o en la economía con $G = 0$? Justifique su respuesta. ¿Cuál es la intuición detrás de este resultado? AYUDA: ¿cómo cambia el gráfico del apartado anterior cuando $G > 0$?

Problema 3. Cambios en el nivel de la productividad

Considere el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans de horizonte infinito y tiempo continuo. La tasa de crecimiento de la población es $n > 0$. Cada agente tiene una tasa de descuento intertemporal de $\rho > 0$. La función de producción intensiva (per cápita) es $Af(k)$, donde k representa el capital per cápita y A es un número. El capital se deprecia a una tasa $\delta > 0$. No hay crecimiento exógeno de la productividad, es decir, la tasa de creimiento de A es cero. El Planificador Social de esta economía tiene unas preferencias iguales a

$$\int_0^\infty e^{-(\rho-n)t} u\left[c\left(t\right)\right] dt.$$

1. (10 puntos) Escriba el problema de decisión del Planificador Social.

2. (10 puntos) Caracterice la solución del Problema del Planificador Social como un sistema de ecuaciones diferenciales en k y c. Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones diferenciales, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones diferenciales.

3. (10 puntos) Suponga que A puede tomar dos valores distintos: un valor alto (A_a) y un valor bajo (A_b), $A_a > A_b$. En un mismo gráfico dibuje las líneas de demarcación $\dot{c} = 0$ y $\dot{k} = 0$ y determine los estados estacionarios asociados a cada valor de A.

4. (15 puntos) Suponga que la economía se encuentra en el estado estacionario asociado a A_a. Represente como evolucionan en el tiempo tanto a corto como a largo plazo el consumo, el capital, los salarios y el tipo de interés en respuesta a una **disminución permanente inesperada** de A_a hacia A_b. [Nota: estos gráficos han de tener el tiempo en el eje horizontal].

Problema 4. El FMI en el modelo de generaciones sucesivas

Imagine que es habitante de una pequeña (muy pequeña) isla llamada Autarquia. En esta isla las unidades de tiempo se miden por generaciones. En cada período de tiempo t nace una generación que vive dos unidades de tiempo (t y $t+1$). Por lo tanto, en cada período de tiempo t conviven siempre dos generaciones (los nacidos en $t-1$ y los nacidos en t). Los individuos nacidos en t maximizan la función de utilidad

$$\log\left(c_{1,t}\right) + \beta \log\left(c_{2,t+1}\right),$$

donde $c_{1,t}$ representa el consumo de un joven de la generación t en el período t, $c_{2,t+1}$ representa el consumo de un viejo de la generación t en el período $t+1$ y β es un número positivo. La población es constante (por lo que la tasa de crecimiento de la población es cero). Dada la tradición de los habitantes de esta isla, los individuos sólo trabajan cuando son jóvenes. La función de producción de la isla en su conjunto está dada por $F(K_t, L_t) = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$ donde K_t es el capital utilizado en el período t y L_t representa el número de trabajadores en t. El capital que se usa en el perído t ha de ser acumulado mediante inversión en $t-1$. El capital se deprecia a una tasa $\delta > 0$. No hay progreso técnico o crecimiento de la productividad en esta economía.

En esta isla no hay gobierno. Cada agente toma sus decisiones independientemente y se han creado mercados donde estos agentes pueden realizar sus intercambios.

1. (5 puntos) Escriba el problema de un consumidor cualquiera nacido en t.

2. (5 puntos) Defina un equilibrio competitivo para la isla.

3. (10 puntos) Resuelva el problema del consumidor nacido en t. Es decir obtenga una expresión del consumo cuando joven y viejo y del ahorro ($c_{1,t}$, $c_{2,t+1}$, y s_{t+1}) en función de los precios de esta economía. Estos precios son el salario w_t y el tipo de interés R_{t+1}.

4. (10 puntos) Encuentre una ecuación en diferencias en términos del capital por trabajador ($k_t = K_t/L_t$) que caracteriza el equilibrio competitivo. Encuentre una expresión para el capital por trabajador del equilibrio estacionario (k^*).

Ahora suponga que una importante institución internacional (tipo FMI o Banco Mundial) descubre esta isla y ofrece a sus habitantes la posibilidad de prestar y/o pedir prestado la cantidad que deseen al tipo de interés r.

5. (10 puntos) ¿Sigue siendo $K_t = L_{t-1}s_t$ una condición necesaria para el equilibrio competitivo de esta economía? Razone su respuesta.

6. (5 puntos) ¿Cuál es el tipo de interés de equilibrio de la isla cuando interviene el FMI? Razone su respuesta.

7. (10 puntos) ¿Cuál es el capital en el estado estacionario de esta economía? Compare con el capital en el estado estacionario del apartado (4). ¿Puede decir cuál es mayor? En caso afirmativo diga cual es es mayor. En caso negativo diga de qué depende la diferencia. Razone su respuesta.

Problema 5. ¿Impuestos o subsidios al capital?

Considere el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans de horizonte infinito y tiempo continuo. Cada agente tiene una tasa de descuento intertemporal de

$\rho > 0$. No hay crecimiento de la población por lo que $n = 0$. La función de producción intensiva (per cápita) es $f(k)$, donde k representa el capital per cápita. El capital se deprecia a una tasa $\delta > 0$. No hay crecimiento exógeno de la productividad, es decir, $g = 0$. Los agentes de esta economía maximizan

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} u\left[c\left(t\right)\right] dt.$$

Suponga que el gobierno aplica una política de impuestos sobre las inversiones, gravando éstas a un tipo igual a τ. Esto quiere decir que la productividad del capital después de impuestos, y por tanto el precio del capital, es $r(t) = (1-\tau)f'[k(t)]$. Suponga además que el gobierno devuelve los impuestos con transferencias de suma fija, T. Los individuos pueden acumular activos financieros al tipo de interés $R(t)$ y trabajar al salario $w(t)$.

a. (5 puntos) Escriba el problema de decisión del consumidor.

b. (5 puntos) Defina un equilibrio competitivo en esta economía.

c. (10 puntos) Caracterice la solución del problema del consumidor como un sistema de ecuaciones diferenciales en k y c que dependan de los precios de la economía, el impuesto y las transferencias de suma fija. Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones diferenciales, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones diferenciales.

d. (15 puntos) Suponga que la economía se encuentra en la situación estacionaria sin impuestos ni transferencias y que el gobierno decide aplicar inesperada y permanentemente su plan de impuestos haciendo que tanto τ como T sean positivos. ¿Qué efectos tiene este cambio sobre el nivel de capital, salarios, tipo de interés y bienestar de los individuos? Para responder a esta pregunta ha de utilizar un diagrama de fases y explicar su razonamiento.

e. (15 puntos) Suponga que en vez de aplicar una política de impuestos el gobierno aplica una política de subvenciones financiadas con impuestos de suma fija. Esto se consigue haciendo tanto τ como T negativos. Compare el nivel de capital, salarios, tipo de interés y bienestar con la situación donde se aplicaba el impuesto. Para responder a esta pregunta ha de utilizar un diagrama de fases y explicar su razonamiento.

Problema 6. La Seguridad Social en el modelo de generaciones sucesivas

La forma en que los sistemas de Seguridad Social se administran en la mayoría de países (incluida España) es la siguiente. En cada período, el gobierno cobra impuestos a los trabajadores y transfiere al mismo tiempo, esa riqueza a las personas que estan retiradas. Utilice el modelo de generaciones sucesivas formulado por Diamond (1965) para responder a las siguientes preguntas sobre este sistema. En esta economía las unidades de tiempo se miden por generaciones. En cada período de tiempo t nace una generación que vive dos unidades de tiempo (t y $t+1$). Por lo tanto, en cada período de tiempo t conviven siempre dos generaciones (los nacidos en $t-1$ y los nacidos en t). Los individuos nacidos en t maximizan la función de utilidad

$$\ln(c_{1,t}) + \beta \ln(c_{2,t+1}),$$

donde ln representa el logaritmo neperiano, $c_{1,t}$ representa el consumo de un joven de la generación t en el período t, $c_{2,t+1}$ representa el consumo de un viejo de la generación t en el período $t+1$ y β es un número positivo entre 0 y 1. La tasa de crecimiento de la población es $n > 0$. Los individuos sólo trabajan cuando son jóvenes. Cuando son viejos están retirados. La función de producción de la economía en su conjunto está dada por $F(K_t, L_t) = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$ donde K_t es el capital utilizado en el período t y L_t representa el número de trabajadores en t. El capital que se usa en el perído t ha de ser acumulado mediante inversión en $t-1$. El capital no se deprecia ($\delta = 0$) y no hay progreso técnico o crecimiento de la productividad en esta economía ($g = 0$) y $A = 1$. Para generar el sistema de Seguridad Social, suponga que el gobierno grava a cada individuo joven una cantidad T y usa la recaudación fiscal para pagar beneficios a los individuos viejos, por lo cual cada viejo recibe $(1+n)T$.

a. (5 puntos) Escriba el problema de un consumidor cualquiera nacido en t.

b. (5 puntos) Defina un equilibrio competitivo para esta economía.

c. (10 puntos) Resuelva el problema del consumidor nacido en t. Es decir, obtenga una expresión del consumo cuando joven y viejo y del ahorro ($c_{1,t}$, $c_{2,t+1}$, y s_{t+1}) en función de los precios de esta economía y del impuesto.

d. (10 puntos) Encuentre una ecuación en diferencias en términos del capital por trabajador ($k_t = K_t/L_t$) que caracteriza el equilibrio competitivo.

e. (10 puntos) Utilice la expresión del apartado (d) para analizar el efecto que tiene un aumento marginal de T sobre el nivel de capital, el salario y el tipo de interés del estado estacionario. Para responder a esta pregunta ha de utilizar un gráfico donde represente la determinación del estado estacionario y el impacto del aumento de T, así como explicar su razonamiento.

f. (10 puntos) Suponga que la economía se encuentra en un equilibrio estacionario eficiente y que el gobierno decide cambiar el impuesto de la Seguridad Social. ¿Cómo afecta un aumento marginal en T al bienestar de las generaciones con vida hoy? ¿Y a las generaciones futuras? ¿Qué pasa si el equilibrio estacionario es ineficiente?

Problema 7. Organizaciones internacionales y crecimiento

Considere el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans de horizonte infinito y tiempo continuo. La tasa de crecimiento de la población es $n > 0$. Cada agente tiene una tasa de descuento intertemporal de $\rho > 0$. La función de producción intensiva (per cápita) es $f(k)$, donde k representa el capital per cápita. El capital se deprecia a una tasa $\delta > 0$. No hay crecimiento exógeno de la productividad ni gobierno. El Planificador Social de esta economía tiene unas preferencias iguales a

$$\int_0^\infty e^{-(\rho-n)t} u(c(t))dt$$

donde u es una función estrictamente creciente y cóncava.

a. (10 puntos) Escriba el problema de decisión del Planificador Social.

b. (10 puntos) Caracterice la solución del Problema del Planificador Social como un sistema de ecuaciones diferenciales en k y c. Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones diferenciales, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones diferenciales.

c. (10 puntos) Represente el sistema de ecuaciones diferenciales en un diagrama de fases. Represente la dinámica de k y c en el plano y la trayectoria de silla. No es suficiente con hacer el gráfico. Es importante que discuta los elementos que representa en él.

d. (10 puntos) Suponga que esta economía se encuentra en su estado estacionario desde el momento $t = 0$ (por ejemplo, el 1 de enero de 2000). En un momento que llamaremos $t_1 > 0$ (por ejemplo, el 1 de enero de 2001) una organización internacional regala de forma inesperada una cantidad de capital x a cada agente de esta economía. Represente en el diagrama de fases la trayectoria que sigue la economía.

e. (10 puntos) Represente la senda temporal que siguen el capital per cápita, el consumo per cápita, el salario y el tipo de interés desde el momento $t = 0$ hasta $t = \infty$ pasando por $t = t_1$. Para ello haga cuatro gráficos con el tiempo en el eje horizontal donde represente la evolución de estas variables. Explique la intuición en la evolución de las variables.

Problema 8. La Seguridad Social en el modelo de Diamond

Considere el modelo de generaciones sucesivas con producción de Diamond (1965). Los individuos nacidos en t maximizan la función de utilidad

$$\ln(c_{1,t}) + \beta \ln(c_{2,t+1}),$$

donde $c_{1,t}$ representa el consumo de un joven de la generación t en el período t y $c_{2,t+1}$ representa el consumo de un viejo de la generación t en el período $t+1$. Los individuos sólo trabajan cuando son jóvenes. La tasa de crecimiento de la población es n. La función de producción está dada por $F(K_t, L_t) = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$. No hay progreso técnico o crecimiento de la productividad en la economía. El capital se deprecia a una tasa $\delta > 0$.

Suponga que el gobierno impone una Seguridad Social con *régimen de reparto*. Esto significa que el gobierno cobra una cantidad fija $T_t = T$ de impuestos a cada persona joven en el momento t y usa lo recaudado para financiar las prestaciones que cobran los individuos viejos en ese período, de modo que cada individuo viejo recibe $(1+n)T$.

a. (10 puntos) Escriba y resuelva el problema del consumidor nacido en t. Es decir obtenga una expresión del consumo cuando joven y viejo y del ahorro ($c_{1,t}$, $c_{2,t+1}$, y s_{t+1}) en función de w_t, R_{t+1}, y T.

b. (10 puntos) Encuentre la ecuación en diferencias en términos del capital por trabajador ($k_t = K_t/L_t$) que caracteriza el equilibrio competitivo. Encuentre el capital en el estado estacionario. ¿Depende este capital del valor de T? ¿Por qué?

Ahora suponga que el gobierno instaura una Seguridad Social con un *régimen de capitalización*. Esto significa que el gobierno cobra una cantidad T de impuestos a cada persona joven y usa lo recaudado para adquirir capital, de modo que los individuos nacidos en t reciben $(1+R_{t+1})T$ en su vejez.

c. (10 puntos) Escriba y resuelva el problema del consumidor nacido en t. Es decir obtenga una expresión del consumo cuando joven y viejo y del ahorro ($c_{1,t}$, $c_{2,t+1}$, y s_{t+1}) en función de w_t, R_{t+1}, y T.

d. (10 puntos) Encuentre la ecuación en diferencias en términos del capital por trabajador ($k_t = K_t/L_t$) que caracteriza el equilibrio competitivo. Encuentre el capital en el estado estacionario. ¿Depende este capital del valor de T? ¿Por qué?

e. (10 puntos) Compare sus respuestas en (b) y (d). Para responder a esta pregunta haga un gráfico y explique por qué hay o no hay diferencias entre sus respuestas. Se valorará la concordancia entre el gráfico y la explicación.

Problema 9. La desaceleración de la productividad y el ahorro

Considere el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans de horizonte infinito y tiempo contínuo. La tasa de crecimiento de la población $L(t)$ es $n > 0$. La tecnología $A(t)$ crece a una tasa g. La tasa de descuento intertemporal es ρ. Si un individuo consume la cantidad x, su utilidad instantánea viene representada por la función

$$u(x) = \frac{x^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}$$

La economía empieza con un stock de capital agregado $K(0) = K_0$, dado. Defina con letras mayúsculas variables agregadas de la economía y con minúsculas las variables por unidad de eficiencia. Por lo tanto, para cada variable $X(t)$, las variables per cápita se calculan como $X(t)/L(t)$.

a. (10 puntos) Escriba el problema de decisión del planificador social.

b. (10 puntos) Caracterice la solución del problema del planificador social como un sistema de ecuaciones diferenciales en k y c. Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones diferenciales, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones diferenciales.

c. (10 puntos) Suponga que g disminuye de forma inesperada y permanente. ¿Qué efecto tiene (si es que tiene alguno) este acontecimiento sobre las curvas $\dot{k} = 0$ y $\dot{c} = 0$?

d. (10 puntos) ¿Qué sucede con c y k en el momento del cambio?

e. (10 puntos) Suponga que la función de producción es del tipo Cobb-Douglas, $f(k) = k^{\alpha}$. Halle una expresión (en función de los parámetros ρ, n, g, θ y α) para la incidencia de un cambio marginal de g sobre el porcentaje de la producción que se destina al ahorro en la senda de crecimiento sostenido. (Pista: emplee el hecho de que $f'(k) = \rho + \theta g$ en el estado estacionario). Interprete en términos económicos el resultado obtenido.

Problema 10. El modelo de generaciones solapadas de Samuelson y el dinero

Suponga que en el período t nacen L_t individuos que vivirán durante dos períodos y que el tamaño de las generaciones crece a la tasa constante $n > 0$. Las preferencias de cada individuo nacido en t se representan con la función de utilidad

$$\ln(c_{1t}) + \ln(c_{2t+1})$$

donde c_{1t} es el consumo de joven y c_{2t+1} es el consumo de viejo. No hay descuento intertemporal de la utilidad. Cada individuo nacido en t recibe una dotación de A unidades del único bien que produce la economía; el individuo puede optar por consumir o almacenar este bien. Cada unidad almacenda produce $x > 0$ unidades del bien en el período siguiente. No hay capital ni función de producción que dependa de factores productivos.

Suponga que en el período inicial (período 0), además de los L_0 individuos jóvenes, cada uno de los cuales recibe una dotación de A unidades del bien, hay $[1/(1+n)]\, L_0$ individuos que únicamente estarán vivos durante ese período. Cada uno de estos individuos "viejos" posee una dotación de Z unidades del bien; la utilidad de esas personas es simplemente su consumo en el período inicial, c_{20}.

a. (10 puntos) Describa el equilibrio descentralizado de esta economía. Es decir, obtenga los niveles de consumo en cada período que maximizan la utilidad de un individuo, en función de A y x.

b. (10 puntos) Considere un equilibrio en el que los individuos almacenan una fracción constante f de su dotación. ¿Cuál es el consumo per cápita total (es decir, el consumo de todos los jóvenes más el de todos los viejos) como función de f? Si $x < 1 + n$ y $0 \leq f \leq 1$, ¿qué valor de f maximizará el consumo per cápita? En tal caso, ¿es el equilibrio descentralizado, obtenido en el apartado a, Pareto eficiente? Si no lo es, ¿cómo podría aumentar el bienestar un hipotético planificador social?

c. (10 puntos) Suponga que $x < 1 + n$ y que los individuos viejos que hay en el período 0, además de tener una dotación de Z unidades del bien, poseen M unidades de un bien almacenable y divisible, llamado dinero, el cual no proporciona por sí mismo utilidad alguna. Considere un individuo nacido en t. Suponga que el precio del bien que produce la economía en unidades monetarias es P_t en t y P_{t+1} en $t+1$. De modo que ahora el individuo puede vender unidades de su dotación del bien a cambio de P_t unidades monetarias y luego utilizar ese dinero para comprarle a la siguiente generación P_t/P_{t+1} unidades de su dotación en el próximo período. Suponiendo que $x < P_t/P_{t+1}$, ¿cuánto consume el individuo en el primer período? De la parte de la dotación que no consume, ¿cuánto almacena y cuánto vende a cambio de dinero?

d. (10 puntos) Suponiendo que $x < P_t/P_{t+1}$, halle una expresión para la demanda agregada de dinero real en el momento t (es el número de personas que en ese momento está en su primer período, multiplicado por la cantidad que desea vender cada una de ellas a cambio de dinero). La oferta agregada de dinero real es $[L_0/(1+n)]\, M/P_t = \left[L_t/(1+n)^{t+1}\right] M/P_t$. ¿Por qué?

e. (10 puntos) Siguiendo con los supuestos de la pregunta anterior, ¿cuál es la relación de precios de equilibrio? Pista: igualando demanda y oferta de dinero agregadas en t y en $t+1$, halle una expresión para P_t y para P_{t+1} y divida. Comparando con la respuesta a la pregunta b, ¿podemos decir que, en este caso, con esta relación de precios, el dinero permite alcanzar la eficiencia?

Problema 11. Como administrar un recurso natural

En este ejercicio vamos a utilizar el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans de horizonte infinito y tiempo contínuo para estudiar como administrar un recurso natural. Para ello, imagine que administra una piscifactoría donde se crian truchas. En cada momento t, la cantidad de truchas en la piscifactoría es $k(t)$ y la cantidad de truchas que se sacan para consumir es $c(t)$. El número de truchas que nacen en t es una función $f(k)$ del número de truchas que ya existen en la fábrica. Debido a enfermedades o a vejez, en cada momento se mueren una proporción $0 < \delta < 1$ de la truchas existentes. Su decisión como administrador/a es decidir de forma contínua cuantas truchas sacar de la piscifactoría para consumo, $c(t)$, para maximizar la utilidad derivada del consumo de truchas y que es igual a

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} u\left[c(t)\right] dt$$

donde u es una función estrictamente creciente y cóncava y ρ es un parámetro positivo.

a. (5 puntos) Escriba la expresión que determina la variación en el tiempo del número de truchas, $\dot{k}(t)$.

b. (5 puntos) Escriba el problema que tiene que resolver como administrador/a en forma de una maximización con restricciones.

c. (10 puntos) Caracterice la solución del problema del apartado (b) como un sistema de ecuaciones diferenciales en k y c. Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones diferenciales, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones diferenciales.

d. (10 puntos) Represente el sistema de ecuaciones diferenciales en un diagrama de fases. Represente la dinámica de k y c en el plano y la trayectoria de silla. No es suficiente con hacer el gráfico. Es importante que discuta los elementos que representa en él. Imagine que en el momento 0 comienza con una cantidad dada de truchas $k(0) = k_0 > 0$. Represente la evolución en el tiempo del consumo óptimo de truchas, $c(t)$, y del stock de truchas, $k(t)$, desde el momento 0 hasta el infinito.

Ahora suponga que en vez de una piscifactoría de truchas usted administra un pozo petrolífero. En este caso, $k(t)$ denota la cantidad de petróleo que permanece en el pozo y $c(t)$ es la cantidad que extraimos para consumir. También suponemos que debido a accidentes, filtraciones u otras razones se pierde una proporción $0 < \delta < 1$ del petróleo existente. Por último, la diferencia fundamental entre un recurso renovable (como las truchas) y no renovable (como el petróleo), es que no se puede "producir" petróleo por lo que $f(k) = 0$ para cualquier valor de k. De nuevo, su decisión como administrador/a es decidir cuanto petróleo extraer para su consumo en cada momento t, $c(t)$, de forma que se maximice la utilidad que se deriva de utilizarlo y que sigue siendo igual a

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} u\left[c(t)\right] dt.$$

e. (5 puntos) Escriba la expresión que determina la variación en el tiempo del "stock" de petróleo, $\dot{k}(t)$.

f. (5 puntos) Escriba el problema que tiene que resolver como administrador/a en forma de una maximización con restricciones.

g. (10 puntos) Caracterice la solución del problema del apartado (b) como un sistema de ecuaciones diferenciales en k y c. Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones diferenciales, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones diferenciales.

h. (10 puntos) Represente el sistema de ecuaciones diferenciales en un diagrama de fases. Represente la dinámica de k y c en el plano y la trayectoria de silla. No es suficiente con hacer el gráfico. Es importante que discuta los elementos que representa en él. Imagine que en el momento 0 comienza con una cantidad dada de petróleo $k(0) = k_0 > 0$. Represente la evolución en el tiempo de la extracción óptima de petróleo, $c(t)$, así como del stock de petróleo, $k(t)$, desde el momento 0 hasta el infinito.

Problema 12. Políticas de desarrollo

Considere el modelo de generaciones sucesivas con producción de Diamond (1965). Los individuos nacidos en t maximizan la función de utilidad

$$\ln(c_{1,t}) + \beta \ln(c_{2,t+1}),$$

donde $c_{1,t}$ representa el consumo de un joven de la generación t en el período t y $c_{2,t+1}$ representa el consumo de un viejo de la generación t en el período $t+1$. Los individuos sólo trabajan cuando son jóvenes. La función de producción está dada por $F(K_t, L_t) = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$. No hay progreso técnico o crecimiento de la productividad en la economía. El capital se deprecia a una tasa $\delta > 0$. La tasa de crecimiento de la población es n.

a. (10 puntos) Escriba y resuelva el problema del consumidor nacido en t. Es decir obtenga una expresión del consumo cuando joven y viejo y del ahorro ($c_{1,t}$, $c_{2,t+1}$, y s_{t+1}) en función de w_t y R_{t+1}.

b. (10 puntos) Encuentre la ecuación en diferencias en términos del capital por trabajador ($k_t = K_t/L_t$) que caracteriza el equilibrio competitivo. Encuentre el capital en el estado estacionario.

Ahora suponga que existen dos economías a las que llamaremos A y B. Estas dos economías pueden ser descritas por este modelo y sólo se diferencian en la tasa de crecimiento de sus poblaciones respectivas. La población de la economía A crece a la tasa n_A y la de la B a la tasa n_B con $n_A > n_B$.

c. (10 puntos) Represente en un gráfico en el plano (k_t, k_{t+1}) cada una de estas economías. ¿Qué economía será más pobre en el largo plazo? Explique la intuición de este resultado.

d. (10 puntos) Imagine que ambas economías están desde el momento 0 hasta el momento $T > 0$ en sus respectivos estados estacionarios, representados por los niveles de capital k_{ss}^A y k_{ss}^B. En el período T, y sólo en ese período, una organización internacional le regala a los viejos de la economía más pobre capital suficiente para llegar al nivel de capital de la economía más rica. Represente en un gráfico la evolución del capital, consumo, tipo de interés y salario de la economía pobre desde el momento 0 hasta el infinito.