Macroeconomia Avanzada II
Examen de prueba

Problema 1. Organizaciones internacionales y crecimiento (50 puntos)

Considere el modelo de Ramsey. La tasa de crecimiento de la población es $n > 0$. Cada agente tiene una tasa de descuento intertemporal de $0 < \beta < 1$. La función de producción intensiva (per cápita) es $f(k)$, donde k representa el capital per cápita. El capital se deprecia a una tasa $\delta > 0$. No hay crecimiento exógeno de la productividad ni gobierno. El Planificador Social de esta economía tiene unas preferencias iguales a

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c(t)$$

donde u es una función estrictamente creciente y cóncava.

a. (10 puntos) Escriba el problema de decisión del Planificador Social.

b. (10 puntos) Caracterice la solución del Problema del Planificador Social como un sistema de ecuaciones diferenciales en k y c. Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones diferenciales, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones diferenciales.

c. (10 puntos) Represente el sistema de ecuaciones diferenciales en un diagrama de fases. Represente la dinámica de k y c en el plano y la trayectoria de silla. No es suficiente con hacer el gráfico. Es importante que discuta los elementos que representa en él.

d. (10 puntos) Suponga que esta economía se encuentra en su estado estacionario desde el momento $t = 0$ (por ejemplo, el 1 de enero de 2000). En un momento que llamaremos $t_1 > 0$ (por ejemplo, el 1 de enero de 2001) una organización internacional regala de forma inesperada una cantidad de capital x a cada agente de esta economía. Represente en el diagrama de fases la trayectoria que sigue la economía.

e. (10 puntos) Represente la senda temporal que siguen el capital per cápita, el consumo per cápita, el salario y el tipo de interés desde el momento $t = 0$ hasta $t = \infty$ pasando por $t = t_1$. Para ello haga cuatro gráficos con el tiempo en el eje horizontal donde represente la evolución de estas variables. Explique la intuición en la evolución de las variables.

Solución

a. El Planificador Social resuelve el siguiente problema de decisión: elegir $\{c(t),\, k(t)\}$ para maximizar

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left[c(t)\right]$$

sujeto a las restricciones

$$\begin{gathered} c(t) + (1+n)k(t+1) - (1-\delta)k(t) = f\left[k(t)\right] \\ k(0) = k_0;\; c\left(t\right), k\left(t\right) \geq 0 \end{gathered}$$

b. Para resolver el problema escribimos el Lagrangiano como

$$\begin{aligned} L\left[\{c(t), a(t), \lambda(t)\}_{t=0}^{\infty}\right] \;\; = \;\; & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{u(c(t)) - \right. \\ & \left. -\lambda(t)\left[c(t) + (1+n)k(t+1) - (1-\delta)k(t) - f\left[k(t)\right]\right]\right\}. \end{aligned}$$

Las condiciones necesarias (y suficientes en este caso) son:

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial c(t)} = \beta^t \left[u'\left[c(t)\right] - \lambda(t)\right] = 0$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial k(t+1)} = -\beta^t (1+n)\lambda(t) + \beta^{t+1}\lambda(t+1)\left[1 - \delta + f'\left(k(t+1)\right)\right] = 0$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \lambda(t)} = \beta^t \left[c(t) + (1+n)k(t+1) - (1-\delta)k(t) - f\left[k(t)\right]\right] = 0.$$

Estas ecuaciones se pueden resumir en

$$u'\left[c(t)\right] = \beta u'\left[c(t+1)\right]\left[1 - \delta + f'\left(k(t+1)\right) - n\right] \tag{B1}$$

$$c(t) + (1+n)k(t+1) - (1-\delta)k(t) = f\left[k(t)\right]. \tag{B2}$$

La ecuación de Euler (B1) junto con la condición de factibilidad (B2) forman un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Las condiciones de contorno son la condición inicial

$$k(0) = k_0 \text{ dado,} \tag{B3}$$

y la condición de transversalidad

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t u'\left[c(t)\right] k(t) = 0. \tag{B4}$$

c. La forma de ver lo que las condiciones (B1) y (B2) nos dicen es la siguiente. Un individuo en un momento t tiene un stock de capital de $k(t)$ por lo que puede producir $f[k(t)]$ unidades de bienes. Parte de estas unidades de bienes las utiliza para consumir, $c(t)$, y parte van dedicadas a inversión que aumentan el stock de capital $\Delta k(t)$. Con este aumento del stock de capital su producción va a aumentar en el futuro por lo que su consumo va a amuentar en el futuro. La primera condición nos dice como ha de ser el consumo del siguiente periodo en relación al consumo de este período para que estas decisiones sean óptimas. La segunda expresión nos dice que posibles sendas son factibles para la economía.

Si fueramos el planificador de esta economía podríamos usar esta información de la siguiente forma. Una posibilidad es saber cómo varían el consumo y el capital para cualquier posible combinación de niveles de consumo y capital. Vemos que hay una serie de combinaciones de k y c para las que $\Delta c = 0$. Según (C1) estas son las combinaciones que satisfacen

$$1 - \delta + f'(k_{ROM}) - n = \frac{1}{\beta}.$$

Esto implica una linea vertical en el espacio (k, c). A ese nivel de capital lo vamos a llamar **nivel de capital de la regla de oro modificada** (k_{ROM}). Vemos que si en nuestra economía el nivel de capital per cápita es menor que k_{ROM}, el consumo estará aumentando y si el capital es mayor que k_{ROM}, el consumo está disminuyendo. Podemos también ver las combinaciones de puntos para las que $\Delta k = 0$. Según (C2) estas son las combinaciones que satisfacen

$$c = f(k) - (\delta + n) k.$$

Por un lado es fácil ver por que por debajo de la línea $\Delta k = 0$ el capital aumenta y por encima disminuye. Cada nivel de capital determina el producto disponible para sus distintos usos. Si el consumo es bajo, $\Delta k > 0$ y si es alto, estamos comiéndonos capital y $\Delta k < 0$. Podemos dibujar estas dos expresiones en un diagrama de fases (véase figura 1 al final del documento).

d. En este caso, el nivel de capital pasará de k_{ROM} a $k_{t_1} > k_{ROM}$. Lo que hace el planificador es elegir el consumo $c_{t_1} > c_{ROM}$. Después vuelve al estado estacionario que tenía la economía a lo largo de la trayectoria de silla. Por lo tanto, el consumo disminuye hasta su nivel estacionario así como el capital. Es importante notar que las lineas $\Delta k = 0$ y $\Delta c = 0$ no cambian. Véase la figura 2 al final del documento.

e. Las trayectorias de estas variables están en el gráfico 3 al final del documento.

Problema 2. El Modelo de Generaciones Solapadas (50 puntos).

Considere el modelo de generaciones solapadas. En esta economia las unidades de tiempo se miden en generaciones. En cada periodo de tiempo t nace una generacion que vive dos unidades de tiempo (t y $t+1$). Por lo tanto en cada periodo de tiempo t conviven dos generaciones (los jovenes y los viejos). Los individuos nacidos en t tienen la siguiente función de utilidad

$$U = \ln(c_{1,t}) + \beta \ln(c_{2,t+1}),$$

donde $0 < \beta < 1$. Los individuos cuando son jovenes reciben una dotación W que pueden invertir en un activo con rendimiento R (W y R son ambos constantes). No hay progreso técnico ni crecimiento de la población ($n = g = 0$). En la economia existe un nivel constante de deuda publica B que caduca en cada periodo. La deuda paga un tipo de interes R. La deuda es mantenida por los jovenes que en esta manera financian su jubilacion. Para pagar los intereses sobre la deuda, el gobierno impone un impuesto sobre los jovenes igual a RB y en cada periodo emite la nueva deuda B.

a. (5 puntos) Escriba el problema de un consumidor cualquiera nacido en t.

b. (15 puntos) Resuelva el problema del consumidor nacido en t. Es decir, obtenga una expresión de $c_{1,t}$, $c_{2,t+1}$ y s_{t+1} en función de W y R. Argumentar (en palabras) el efecto del nivel de la deuda B sobre el consumo y el bienestar.

c. (15 puntos) Al tiempo t el gobierno decide de retirar la deuda publica imponiendo un impuesto sobre los jovenes de una cantidad igual a $(1+R)B$. Caracterize el efecto de esta politica sobre el consumo y el bienestar de las generaciones nacidas en $t-1$, t y $t+1$.

d. (10 puntos) Asumimos que, antes de retirar la deuda con el impuesto del apartado anterior, el gobierno sométa esa politica a los votos. Ambas generaciones, la joven (o sea la nacida en t) y la vieja (o sea la nacida en $t-1$), tienen un voto. ¿Qual es el resultado del voto? ¿Se aprobaría la política de retirar la deuda?

e. (5 puntos) Dada la respuesta en el apartado (d), ¿porqué pueden occurrir en la realidad reducciones de deuda publica?

Solución:

a. El problema de un agente nacido en t es

$$\underset{(c_{1,t};c_{2,t+1})}{Max} \qquad \ln(c_{1,t}) + \beta \ln(c_{2,t+1})$$

sujeto a

$$\begin{aligned} c_{1,t} + s_{t+1} &= W - RB; \\ c_{2,t+1} &= s_{t+1}(1+R); \\ c_{1,t} &\geq 0; \quad c_{2,t+1} \geq 0. \end{aligned}$$

La restricción presupuestaria se puede reescribir como

$$c_{1,t} + \frac{c_{2,t+1}}{1+R} = W - RB$$

b. Las condiciones de primer orden son

$$\frac{1}{c_{1,t}} = \beta(1+R)\frac{1}{c_{2,t+1}},$$

$$c_{1,t} + \frac{c_{2,t+1}}{1+R} = W - RB \Rightarrow c_{1,t} = \frac{1}{1+\beta}(W - RB).$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} s_{t+1} &= \frac{\beta}{1+\beta}(W - RB); \\ c_{2,t+1} &= (1+R)\frac{\beta}{1+\beta}(W - RB). \end{aligned}$$

El consumo es menor (respecto al caso donde $B = 0$) en ambos periodos debido al pago de los intereses sobre la deuda pública (o sea RB). Entonces tambien el bienestar es menor.

c. Respecto a los nacidos en $t-1$, no hay cambio en el perfil del consumo por lo que tampoco hay cambios en el bienestar.

Para los agentes nacidos en t, el perfil del consumo se obtiene del mismo problema del apartado (a) con un valor del impuesto ahora de $(1+R)B$ para eliminar la deuda y no un impuesto de RB solo para pagar el servicio de la dueda. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} c_{1,t} &= \frac{1}{1+\beta}[W - (1+R)B]; \\ c_{2,t+1} &= (1+R)\frac{\beta}{1+\beta}[W - (1+R)B]. \end{aligned}$$

El consumo se reduce y por lo tanto tambien el bienestar.

Por último la generación nacida en $t+1$ no tiene impuestos porque la deuda ha desaparecido entonces su consumo es

$$\begin{aligned} c_{1,t} &= \frac{1}{1+\beta}W; \\ c_{2,t+1} &= (1+R)\frac{\beta}{1+\beta}W. \end{aligned}$$

El consumo es mas alto y tambien el bienestar.

d. Por lo que hemos visto en el apartado anterior, los viejos son indiferentes a la reduccion de la deuda mientras los jóvenes están en contra. Entonces una reducción de la deuda no se llevaria a cabo si se votara porque a los viejos les da igual y los jóvenes no querrían.

e. El modelo de generaciones solapadas puede dejar fuera del análisis factores que pueden ser importantes en la realidad como el altruismo (los jóvenes pueden tener en cuenta el bienestar de sus hijos, o sea de la generacion que va a nacer en $t + 1$ y que se beneficia de la política de reducción de deuda), u horizontes temporales más largos (una reduccion de deuda puede aumentar la acumulación del capital a largo plazo y eso puede influir positivamente si las generaciones viven más de dos periodos).

Figura 1

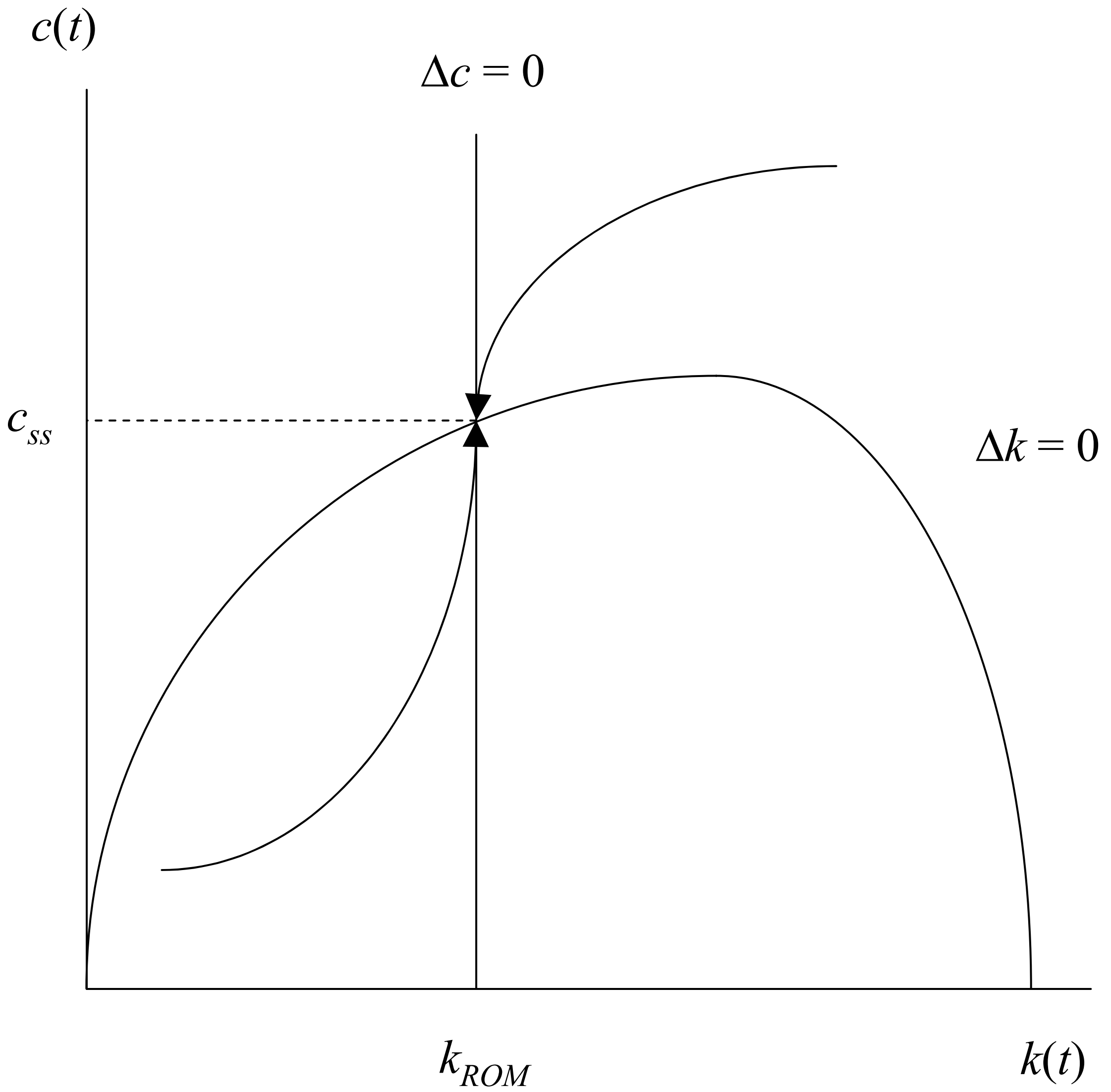

Figura 2

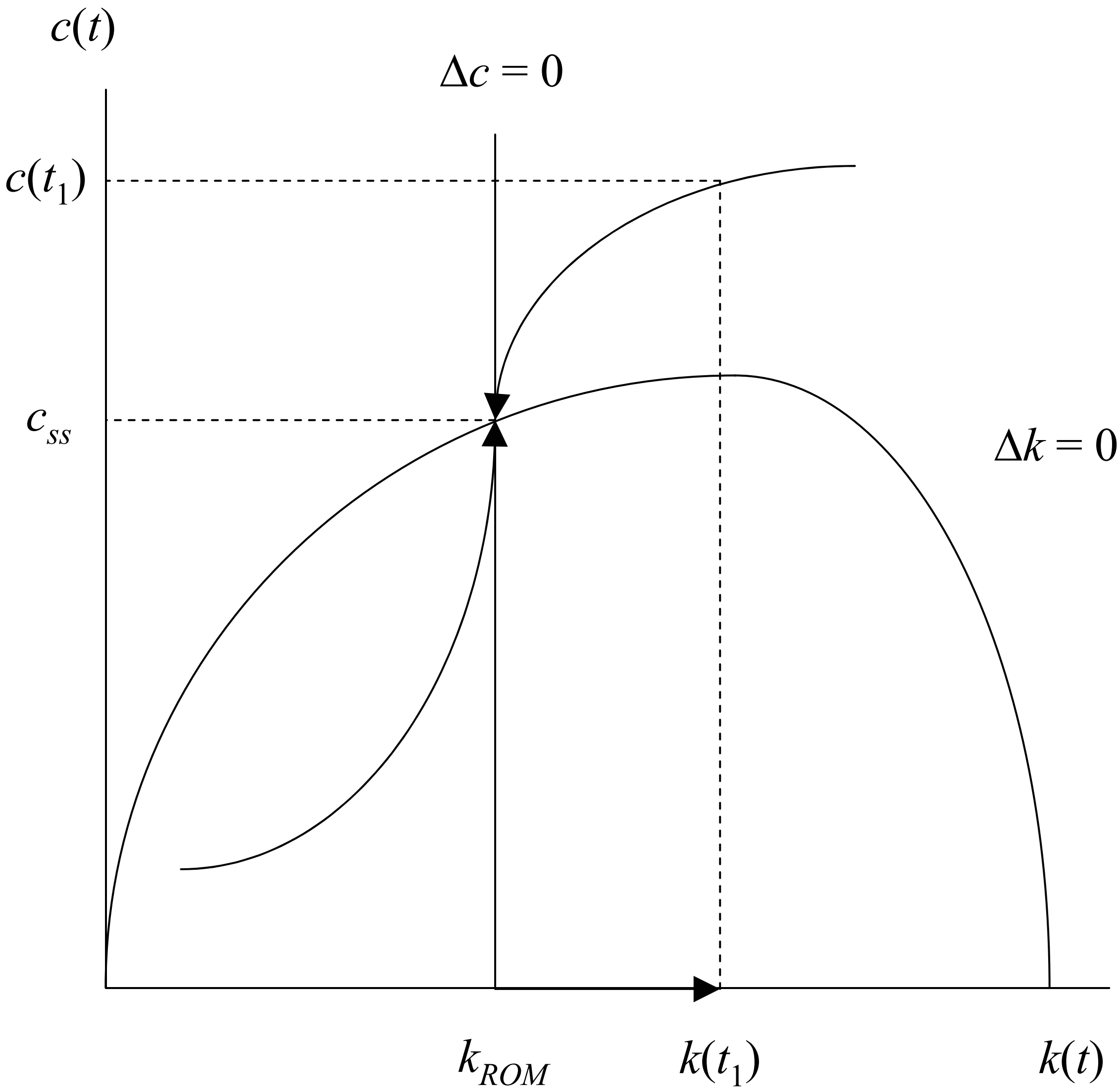

Figura 3