Macroeconomia Avanzada II
Curso 2005-2006

Hoja de ejercicios 4
(Soluciones)

Ejercicio 1. Considere una economía poblada por muchas familias idénticas con preferencias dadas por

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u[c(t)]$$

donde c es el consumo per cápita y γ es un número positivo. En particular,

$$u[c(t)] = \frac{c(t)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}, \text{ para } \gamma > 0, \ \gamma \neq 1,$$

$$u[c(t)] = \ln[c(t)], \text{ para } \gamma = 1.$$

La función de producción de la economía está dada por

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}$$

donde $0 < \alpha < 1$, K denota capital y L denota trabajo. La población crece a una tasa n y el capital se deprecia a una tasa δ. Nótese que no hay progreso técnico. El capital agregado inicial en el momento 0 es $K(0)$ y la población inicial es $L(0)$.

(a) Utilice la regla de L'Hopital para demostrar que $u[c(t)] = \ln[c(t)]$ cuando $\gamma = 1$.

(b) Escriba el problema del Planificador Social en términos per cápita.

(c) Caracterice la solución al problema del Planificador Social como dos ecuaciones en diferencias en $c(t)$ y $k(t)$ junto con dos condiciones de contorno.

(d) Exprese el capital y el consumo del estado estacionario en términos de los parámetros de la economía (esto es, β, γ, α, δ, n) ¿Dependen el consumo y el capital del estado estacionario del nivel de capital per cápita inicial de la economía, $k(0)$?

(e) Calcule el capital per cápita de la regla de oro y compare con el capital per cápita del estado estacionario de esta economía (regla de oro modificada).

(f) Suponga que existen dos economías. La primera economía se caracteriza por tener un parámetro $\gamma = \gamma_1$. La segunda tiene un parámetro $\gamma = \gamma_2$ con $\gamma_1 > \gamma_2 > 0$. ¿Se diferencian estas dos economías en el largo plazo?

(g) Dibujar aproximadamente las trayectorias de silla correspondientes a $\gamma = \gamma_1$ y $\gamma = \gamma_2$. Comparar estas dos trayectorias de silla.

Soluciones

(a) La regla de L'Hopital dice que si hay dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tal que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0; \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

y

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

En el ejercicio

$$\lim_{\gamma\to 1} c^{1-\gamma} - 1 = 0; \lim_{\gamma\to 1} 1 - \gamma = 0.$$

Sin embargo,

$$\frac{d(c^{1-\gamma} - 1)}{d\gamma} = -c^{1-\gamma} \ln(c)$$

y

$$\frac{d(1-\gamma)}{d\gamma} = -1,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma\to 1} \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} &= \lim_{\gamma\to 1} \frac{d(c^{1-\gamma} - 1)/d\gamma}{d(1-\gamma)/d\gamma} = \lim_{\gamma\to 1} \frac{d(c^{1-\gamma} - 1)/d\gamma}{d(1-\gamma)/d\gamma} = \lim_{\gamma\to 1} \frac{-c^{1-\gamma} \ln(c)}{-1} \\ &= \lim_{\gamma\to 1} \left[c^{1-\gamma} \ln(c)\right] = \ln(c). \end{aligned}$$

(b) Escriba el problema del Planificador Social en términos per cápita

Genéricamente, el problema que encara este planificador es el de especificar para cada periodo de tiempo t cómo se dividirá el producto $Y(t)$ entre consumo $C(t)$ y ahorro $S(t)$ de modo que la utiliidad agregada de la población sea máxima. Como todos los individuos tienen la misma función de utilidad, este problema puede reducirse al de maximizar la utilidad de un individuo cualquiera que consuma $c(t)$, el consumo per cápita en ese período, teniendo en cuenta que el consumo per cápita ha de ser igual al producto per cápita menos el ahorro per cápita. La función a maximizar es, por tanto,

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}.$$

Falta especificar la restricción que ha de cumplir para asignar recursos en términos per cápita. La restricciones que ha de cumplir la economía en el agregado son

$$\begin{aligned} &C(t) + K(t+1) - (1-\delta)K(t) = K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha} \\ &K(0) = K_0 \text{ dado} \\ &K(t) \geq 0;\ C(t) \geq 0. \end{aligned}$$

Para expresar estas restricciones en términos per cápita dividimos por la población $L(t)$ y obtenemos

$$\frac{C(t)}{L(t)} + \frac{K(t+1)}{L(t)} - (1-\delta)\frac{K(t)}{L(t)} = \frac{K(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}}{L(t)}$$

$$c(t) + \frac{L(t+1)}{L(t)}\frac{K(t+1)}{L(t+1)} - (1-\delta)k(t) = K(t)^{\alpha}L(t)^{-\alpha}$$

$$c(t) + (1+n)k(t+1) - (1-\delta)k(t) = k(t)^{\alpha}.$$

Por otro lado,

$$K(0) = K_0 \text{ dado}$$

$$\frac{K(0)}{L(0)} = \frac{K_0}{L(0)} \text{ dado}$$

$$k(0) = k_0 \text{ dado.}$$

Por último

$$K(t) \geq 0; \; C(t) \geq 0,$$

$$\frac{K(t)}{L(t)} \geq 0; \; \frac{C(t)}{L(t)} \geq 0,$$

$$k(t) \geq 0; \; c(t) \geq 0.$$

Por lo tanto, el problema del planificador, expresado en términos per cápita es elegir la secuencia $\{c(t), k(t+1)\}_{t=0}^{\infty}$ para maximizar

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}.$$

sujeto a las restricciones

$$c(t) + (1+n)k(t+1) - (1-\delta)k(t) = k(t)^{\alpha},$$

$$k(0) = k_0 \text{ dado,}$$

$$k(t) \geq 0; \; c(t) \geq 0.$$

(c) Caracterice la solución al problema del Planificador Social

El Lagrangiano del problema es

$$L\left[\{c(t), k(t), \lambda(t)\}_{t=0}^{\infty}\right] = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \lambda(t)\left[k(t)^{\alpha} - c(t) - (1+n)k(t+1) + (1-\delta)k(t)\right] \right\}.$$

Antes de hallar las condiciones necesarias que debe satisfacer toda solución, nótese que las restricciones de no negatividad no aparecen por ningún lado. Esto no es del todo correcto, pero podemos hacerlo en este caso concreto porque $k(t)$ y $c(t)$ van a ser siempre mayores que cero en una situación óptima. La razón es obvia: sin consumo no hay utilidad y sin capital no hay producción, y por tanto no se consume. El único momento que debe preocuparnos es cuando $t \to \infty$. Cuando tendemos a la situación terminal puede ser que si sea óptimo reducir el capital a cero. Para considerar esta posibilidad tenemos la condición de transversalidad.

Las condiciones necesarias (y suficientes en este caso) son:

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial c(t)} = \beta^t \left[c(t)^{-\gamma} - \lambda(t)\right] = 0$$
$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial k(t)} = -\beta^t(1+n)\lambda(t) + \beta^{t+1}\lambda(t+1)\left[\alpha k(t+1)^{\alpha-1} + 1 - \delta\right] = 0$$
$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \lambda(t)} = \beta^t\left[k(t)^\alpha - c(t) - (1+n)k(t+1) + (1-\delta)k(t)\right] = 0$$

Estas ecuaciones se pueden resumir en

$$c(t)^{-\gamma} = \lambda(t)$$
$$(1+n)\lambda(t) = \beta\lambda(t+1)\left[\alpha k(t+1)^{\alpha-1} + 1 - \delta\right]$$
$$k(t)^\alpha = c(t) + (1+n)k(t+1) - (1-\delta)k(t).$$

Sustituyendo λ en la segunda ecuación, aparece el sistema en diferencias en c y k

$$(1+n)c(t)^{-\gamma} = \beta c(t+1)^{-\gamma}\left[\alpha k(t+1)^{\alpha-1} + 1 - \delta\right] \qquad ((1))$$
$$k(t)^\alpha = c(t) + (1+n)k(t+1) - (1-\delta)k(t). \qquad ((2))$$

Las condiciones de contorno son la condición inicial

$$k(0) = k_0 \text{ dado,}$$

y la condición de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)k(t) = 0.$$

(d) Exprese el capital y el consumo del equilibrio estacionario en términos de los parámetros de la economía. ¿Dependen el consumo y el capital del estado estacionario del nivel de capital inicial de la economía, k_0?

En el estado estacionario $c(t) = c(t+1) = c_{ss}$, $k(t) = k(t+1) = k_{ROM}$. Sustituyendo en (1)

$$(1+n) = \beta\left[\alpha k_{ROM}^{\alpha-1} + 1 - \delta\right]$$
$$\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha k_{ROM}^{\alpha-1} + 1 - \delta}{(1+n)} \approx \alpha k_{ROM}^{\alpha-1} + 1 - \delta - n$$
$$\frac{1}{\beta} - (1-\delta-n) = \alpha k_{ROM}^{\alpha-1} \qquad ((3))$$
$$k_{ROM} = \left[\frac{\alpha\beta}{1-\beta(1-\delta-n)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Sustituyendo en (2)

$$k_{ROM}^{\alpha} = c_{ss} + (1+n)k_{ROM} - (1-\delta)k_{ROM}$$
$$c_{ss} = k_{ROM}^{\alpha} - (n+\delta)k_{ROM},$$
$$c_{ss} = \left[\frac{\alpha\beta}{1-\beta(1-\delta-n)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - (n+\delta)\left[\frac{\alpha\beta}{1-\beta(1-\delta-n)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Observamos que ni k_{ROM} ni c_{ss} dependen de k_0.

(e) Calcule el capital de la regla de oro y compare con el capital del estado estacionario (regla de oro modificada).

El capital de la regla de oro se definía como aquel k_{RO} tal que el consumo era permanentemente máximo. Para obtener este capital se utiliza (2) cuando $k(t) = k(t+1)$ (la única posibilidad de que el consumo sea constante)

$$c(t) = k(t)^{\alpha} - (\delta+n)k(t)$$

y se calcula el capital que hace el consumo máximo entre las combinaciones de consumo y capital determinadas por esta expresión. Es decir, se maximiza $c(t)$ respecto a $k(t)$. El capital que genera un consumo máximo es el que satisface

$$\alpha k_{RO}^{\alpha-1} = n+\delta.$$

De (3) observamos que el capital de la regla de oro modificada es el que cumple

$$\alpha k_{ROM}^{\alpha-1} = n+\delta+\frac{1}{\beta}-1 > n+\delta = \alpha k_{RO}^{\alpha-1}$$

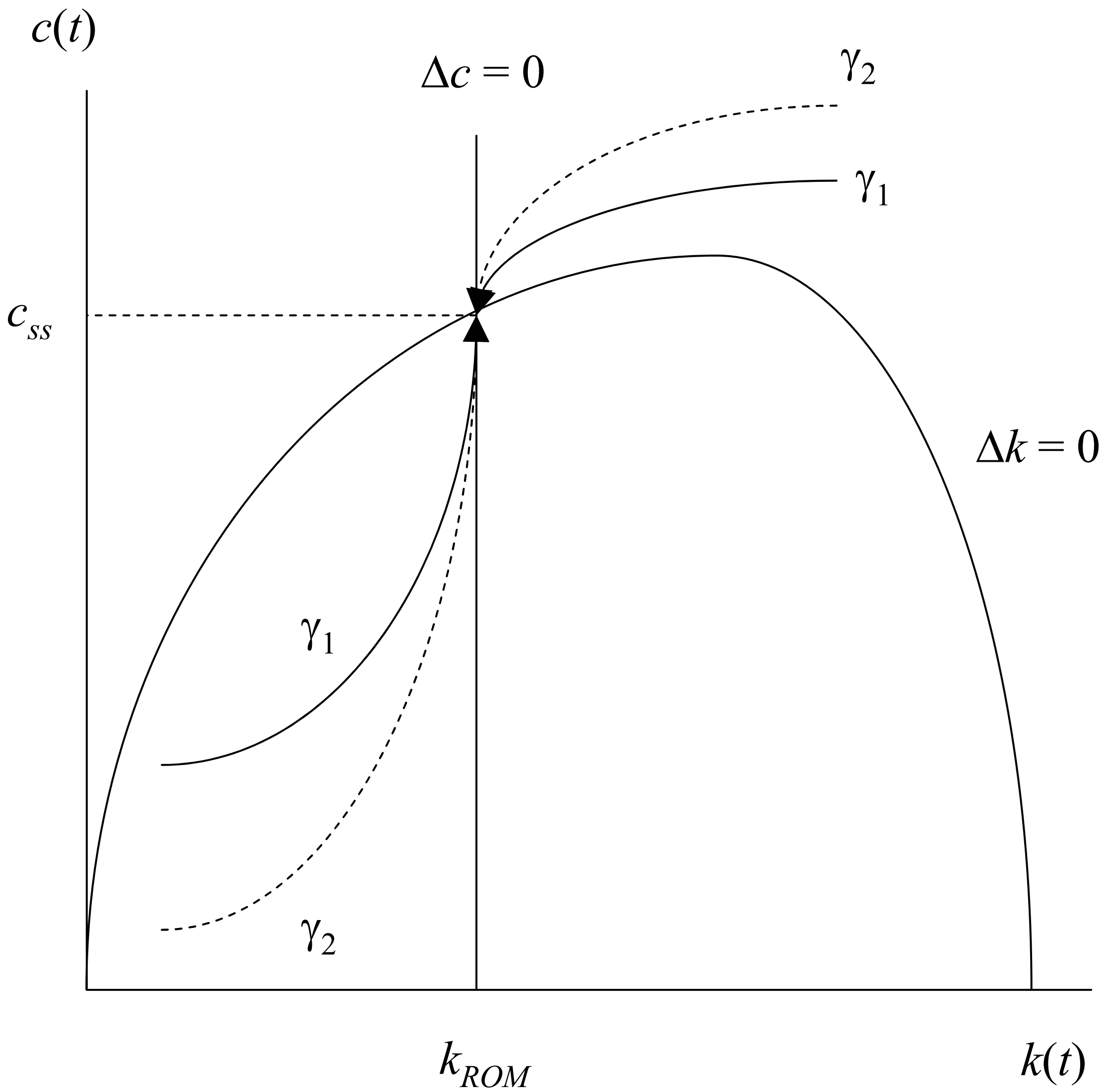
dado que $0 < \beta < 1$. De esta desigualdad se sigue que $k_{ROM} < k_{RO}$.

(f) Suponga que existen dos economías. La primera economía se caracteriza por tener un parámetro $\gamma = \gamma_1$. La segunda tiene un parámetro $\gamma = \gamma_1$ con $\gamma_1 > \gamma_2 > 0$. ¿Se diferencian estas dos economías en el largo plazo?

No, porque ni k_{ROM} ni c_{SS} dependen de γ. Nota: Si hubiéramos supuesto que el nivel tecnológico variaba en el tiempo a una tasa $g \neq 0$, lo anterior no sería cierto.

(g) Dibujar aproximadamente las trayectorias de silla correspondientes a $\gamma = \gamma_1$ y $\gamma = \gamma_2$.

Por la ecuación de Euler vemos que γ afecta negativamente a $c(t+1)/c(t)$. Así que como $\gamma_1 > \gamma_2$, tenemos una tasa de crecimiento del consumo (en senda óptima) menor con γ_1 que con γ_1. Como a largo plazo ambas economías convergen al mismo estado estacionario (como se vio en (e)), se debe cumplir que $c(0)$ sea mayor con γ_1 que con γ_2. En efecto, si ambas economías se dirigen al mismo estado y con γ_1 se crece menos que con γ_2, el nivel inicial de consumo con γ_1 ha de aumentarse con respecto al de γ_2. Además, para valores elevados del parámetro γ, los agentes están muy interesados en alisar su consumo en el tiempo y, por tanto, la trayectoria estable estará muy próxima a la curva en la que $\Delta k(t) = 0$. Cuando γ es muy pequeño a los individuos no les importa tener trayectorias de consumo no lisas. La trayectoria óptima estable en este caso estaría próxima al eje horizontal para stocks de capital pequeños.


$c(t)$
$\Delta c = 0$
γ_2
γ_1
c_{ss}
$\Delta k = 0$
γ_1
γ_2
k_{ROM}
$k(t)$