Macroeconomia Avanzada II
Curso 2005-2006

Hoja de ejercicios 5
A resolver el 31 de marzo de 2006

Ejercicio 1. En este ejercicio vamos a utilizar el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans de horizonte infinito y tiempo contínuo para estudiar como administrar un recurso natural. Para ello, imagine que administra una piscifactoría donde se crian truchas. En cada momento t, la cantidad de truchas en la piscifactoría es $k(t)$ y la cantidad de truchas que se sacan para consumir es $c(t)$. El número de truchas que nacen en t es una función $f(k)$ del número de truchas que ya existen en la fábrica. Debido a enfermedades o a vejez, en cada momento se mueren una proporción $0 < \delta < 1$ de las truchas existentes. Su decisión como administrador/a es decidir de forma contínua cuantas truchas sacar de la piscifactoría para consumo, $c(t)$, para maximizar la utilidad derivada del consumo de truchas y que es igual a

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left[c(t)\right]$$

donde u es una función estrictamente creciente y cóncava y ρ es un parámetro positivo.

a. Escriba la expresión que determina la variación en el tiempo del número de truchas, $\Delta k(t) \equiv k(t+1) - k(t)$.

b. Escriba el problema que tiene que resolver como administrador/a en forma de una maximización con restricciones.

c. Caracterice la solución del problema del apartado (b) como un sistema de ecuaciones en diferencias en k y c. Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones en diferencias, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones en diferencias.

d. Represente el sistema de ecuaciones en diferencias en un diagrama de fases. Represente la dinámica de k y c en el plano y la trayectoria de silla. No es suficiente con hacer el gráfico. Es importante que discuta los elementos que representa en él. Imagine que en el momento 0 comienza con una cantidad dada de truchas $k(0) = k_0 > 0$. Represente la evolución en el tiempo del consumo óptimo de truchas, $c(t)$, y del stock de truchas, $k(t)$, desde el momento 0 hasta el infinito.

Ahora suponga que en vez de una piscifactoría de truchas usted administra un pozo petrolífero. En este caso, $k(t)$ denota la cantidad de petróleo que permanece en el pozo y $c(t)$ es la cantidad que extraimos para consumir. También suponemos que debido a accidentes, filtraciones u otras razones se pierde una proporción $0 < \delta < 1$ del petróleo existente. Por último, la diferencia fundamental entre un recurso renovable (como las truchas) y no renovable (como el petróleo), es que no se puede "producir" petróleo por lo que $f(k) = 0$ para cualquier valor de k. De nuevo, su decisión como administrador/a es decidir cuanto petróleo extraer para su consumo en cada momento t, $c(t)$, de forma que se maximice la utilidad que se deriva de utilizarlo y que sigue siendo igual a

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left[c(t)\right]$$

e. Escriba la expresión que determina la variación en el tiempo del "stock" de petróleo, $\Delta k(t) \equiv k(t+1) - k(t)$.

f. Escriba el problema que tiene que resolver como administrador/a en forma de una maximización con restricciones.

g. Caracterice la solución del problema del apartado (b) como un sistema de ecuaciones en diferencias en k y c. Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones en diferencias, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones en diferencias.

h. Represente el sistema de ecuaciones en diferencias en un diagrama de fases. Represente la dinámica de k y c en el plano y la trayectoria de silla. No es suficiente con hacer el gráfico. Es importante que discuta los elementos que representa en él. Imagine que en el momento 0 comienza con una cantidad dada de petróleo $k(0) = k_0 > 0$. Represente la evolución en el tiempo de la extracción óptima de petróleo, $c(t)$, así como del stock de petróleo, $k(t)$, desde el momento 0 hasta el infinito