

Hoja de ejercicios 5
(Soluciones)

Ejercicio 1. En este ejercicio vamos a utilizar el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans de horizonte infinito y tiempo continuo para estudiar como administrar un recurso natural. Para ello, imagine que administra una piscifactoría donde se crían truchas. En cada momento t , la cantidad de truchas en la piscifactoría es $k(t)$ y la cantidad de truchas que se sacan para consumir es $c(t)$. El número de truchas que nacen en t es una función $f(k)$ del número de truchas que ya existen en la fábrica. Debido a enfermedades o a vejez, en cada momento se mueren una proporción $0 < \delta < 1$ de las truchas existentes. Su decisión como administrador/a es decidir de forma continua cuantas truchas sacar de la piscifactoría para consumo, $c(t)$, para maximizar la utilidad derivada del consumo de truchas y que es igual a

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u [c(t)]$$

donde u es una función estrictamente creciente y cóncava y ρ es un parámetro positivo.

- Escriba la expresión que determina la variación en el tiempo del número de truchas, $\Delta k(t) \equiv k(t+1) - k(t)$.
- Escriba el problema que tiene que resolver como administrador/a en forma de una maximización con restricciones.
- Caracterice la solución del problema del apartado (b) como un sistema de ecuaciones en diferencias en k y c . Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones en diferencias, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones en diferencias.
- Represente el sistema de ecuaciones en diferencias en un diagrama de fases. Represente la dinámica de k y c en el plano y la trayectoria de silla. No es suficiente con hacer el gráfico. Es importante que discuta los elementos que representa en él. Imagine que en el momento 0 comienza con una cantidad dada de truchas $k(0) = k_0 > 0$. Represente la evolución en el tiempo del consumo óptimo de truchas, $c(t)$, y del stock de truchas, $k(t)$, desde el momento 0 hasta el infinito.

Ahora suponga que en vez de una piscifactoría de truchas usted administra un pozo petrolífero. En este caso, $k(t)$ denota la cantidad de petróleo que permanece en el pozo y $c(t)$ es la cantidad que extraímos para consumir. También suponemos que debido a accidentes, filtraciones u otras razones se pierde una

proporción $0 < \delta < 1$ del petróleo existente. Por último, la diferencia fundamental entre un recurso renovable (como las truchas) y no renovable (como el petróleo), es que no se puede “producir” petróleo por lo que $f(k) = 0$ para cualquier valor de k . De nuevo, su decisión como administrador/a es decidir cuanto petróleo extraer para su consumo en cada momento t , $c(t)$, de forma que se maximice la utilidad que se deriva de utilizarlo y que sigue siendo igual a

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u [c(t)]$$

- e. Escriba la expresión que determina la variación en el tiempo del “stock” de petróleo, $\Delta k(t) \equiv k(t+1) - k(t)$.
- f. Escriba el problema que tiene que resolver como administrador/a en forma de una maximización con restricciones.
- g. Caracterice la solución del problema del apartado (b) como un sistema de ecuaciones en diferencias en k y c . Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones en diferencias, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones en diferencias.
- h. Represente el sistema de ecuaciones en diferencias en un diagrama de fases. Represente la dinámica de k y c en el plano y la trayectoria de silla. No es suficiente con hacer el gráfico. Es importante que discuta los elementos que representa en él. Imagine que en el momento 0 comienza con una cantidad dada de petróleo $k(0) = k_0 > 0$. Represente la evolución en el tiempo de la extracción óptima de petróleo, $c(t)$, así como del stock de petróleo, $k(t)$, desde el momento 0 hasta el infinito

Soluciones

- a. La evolución del número de peces en la piscifactoría se rige por la expresión

$$\Delta k(t) = f[k(t)] - c(t) - \delta k(t).$$

Es decir, la variación del número de peces es igual al número de peces que nacen [$f(k)$] menos lo que se consumen (c) menos los que se mueren (δk).

- b. El problema del administrador de la piscifactoría consiste en elegir las sendas para $c(t)$ y $k(t)$ de forma que se maximice la función

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u [c(t)]$$

sujeto a la restricción

$$c(t) + k(t+1) = f[k(t)] + (1 - \delta)k(t),$$

$$k(0) = k_0, \text{ dado}$$

$$k(t) \geq 0, \quad c(t) \geq 0.$$

c. El Lagrangiano del problema es

$$L[\{c(t), k(t), \lambda(t)\}_{t=0}^{\infty}] = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{u[c(t)] - \lambda(t)[c(t) + k(t+1) - f[k(t)] - (1-\delta)k(t)]\}.$$

Las condiciones necesarias (y suficientes en este caso) son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\cdot)}{\partial c(t)} &= \beta^t [u'[c(t)] - \lambda(t)] = 0 \\ \frac{\partial L(\cdot)}{\partial k(t)} &= -\beta^t \lambda(t) + \beta^{t+1} \lambda(t+1) [f'(k(t)) + 1 - \delta] = 0 \\ \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \lambda(t)} &= \beta^t [f[k(t)] + (1-\delta)k(t) - c(t) - k(t+1)] = 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se pueden resumir en

$$u'[c(t)] = \lambda(t)$$

$$\lambda(t) = \beta \lambda(t+1) [f'(k(t)) + 1 - \delta]$$

$$f(k(t)) = c(t) + k(t+1) - (1-\delta)k(t).$$

Sustituyendo λ en la segunda ecuación, aparece el sistema en diferencias en c y k

$$u'[c(t)] = \beta u'[c(t+1)] [f'(k(t)) + 1 - \delta] \quad ((C1))$$

$$f(k(t)) = c(t) + k(t+1) - (1-\delta)k(t). \quad ((C2))$$

Las condiciones de contorno son la condición inicial

$$k(0) = k_0 \text{ dado,}$$

y la condición de transversalidad

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)k(t) = 0.$$

d. La forma de ver lo que las condiciones (C1) y (C2) nos dicen es la siguiente. La piscifactoría en un momento t tiene un número de peces igual a $k(t)$ por lo que nacen $f[k(t)]$ peces. Parte de estos peces se utilizan para consumir, $c(t)$, otra parte se utilizan para reemplazar peces que se han muerto, $\delta k(t)$. Los que quedan se dedican a aumentar el número de peces $\Delta k(t)$. Con este aumento del stock de peces la piscifactoría aumentará la producción en el futuro por lo que su consumo va a aumentar en el futuro $\Delta c(t)$. La información que nos dan estas dos condiciones es un resumen de este proceso.

Si fuéramos el administrador de esta piscifactoría podríamos usar esta información de la siguiente forma. Una posibilidad es saber cómo varían el consumo y el stock de peces para cualquier posible combinación de niveles de consumo y

número de peces. Vemos que hay una serie de combinaciones de k y c para las que $\Delta c(t) = 0$. Según (C1) estas son las combinaciones que satisfacen

$$\frac{1}{\beta} = f'(k_{ROM}) + 1 - \delta.$$

Esto implica una línea vertical en el espacio (k, c) . A ese nivel de población de peces es a lo que llamamos **nivel de capital de la regla de oro modificada** (k_{ROM}). Vemos que si en nuestra economía el nivel de capital per cápita es menor que k_{ROM} , el consumo estará aumentando y si el capital es mayor que k_{ROM} , el consumo está disminuyendo. Podemos también ver las combinaciones de puntos para las que $\Delta k(t) = 0$. Según (C2) estas son las combinaciones que satisfacen

$$c = f(k) - \delta k.$$

Por un lado es fácil ver por que por debajo de la línea $\Delta k(t) = 0$ el número de peces aumenta y por encima disminuye. Cada nivel de k determina el producto disponible para sus distintos usos. Si el consumo es bajo, $\Delta k(t) > 0$ y si es alto, estamos comiéndonos muchos peces y $\Delta k(t) < 0$. Podemos dibujar estas dos expresiones en un diagrama de fases (ver gráfico al final del documento). Si empezamos con una población de peces $k_0 > 0$, la trayectoria que seguirá el consumo y el stock de truchas dependerá de si la población inicial está a la derecha o a la izquierda de k_{ROM} . Si está a la izquierda, $k_0 < k_{ROM}$, significa que se consumen y mueren pocos peces en relación a los que nacen y el stock de peces aumenta. Si está a la derecha, $k_0 > k_{ROM}$, ocurre al revés. El gráfico al final del documento reproduce la evolución cuando $k_0 > k_{ROM}$.

e. La evolución del petróleo en el pozo se rige por la expresión

$$\Delta k(t) = -c(t) - \delta k(t).$$

Es decir, la cantidad de petróleo siempre disminuirá ($\Delta k(t) < 0$) bien sea por consumo o por accidentes.

f. El problema del administrador del pozo consiste en elegir las sendas para $c(t)$ y $k(t)$ de forma que se maximice la función

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u[c(t)]$$

sujeto a la restricción

$$c(t) + k(t+1) = (1 - \delta)k(t),$$

$$k(0) = k_0, \text{ dado}$$

$$k(t) \geq 0, c(t) \geq 0.$$

g. Siguiendo los mismos pasos del apartado (c), llegamos a las expresiones

$$u'[c(t)] = \beta u'[c(t+1)](1 - \delta) \quad ((G1))$$

$$c(t) + k(t+1) = (1 - \delta)k(t). \quad ((G2))$$

lo que tenemos es un sistema de dos ecuaciones en diferencias. Solucionarlo implica encontrar las dos funciones $c(t)$ y $k(t)$ que substituidas en estas expresiones las satisfacen. Las condiciones de contorno que nos permiten encontrar una solución son

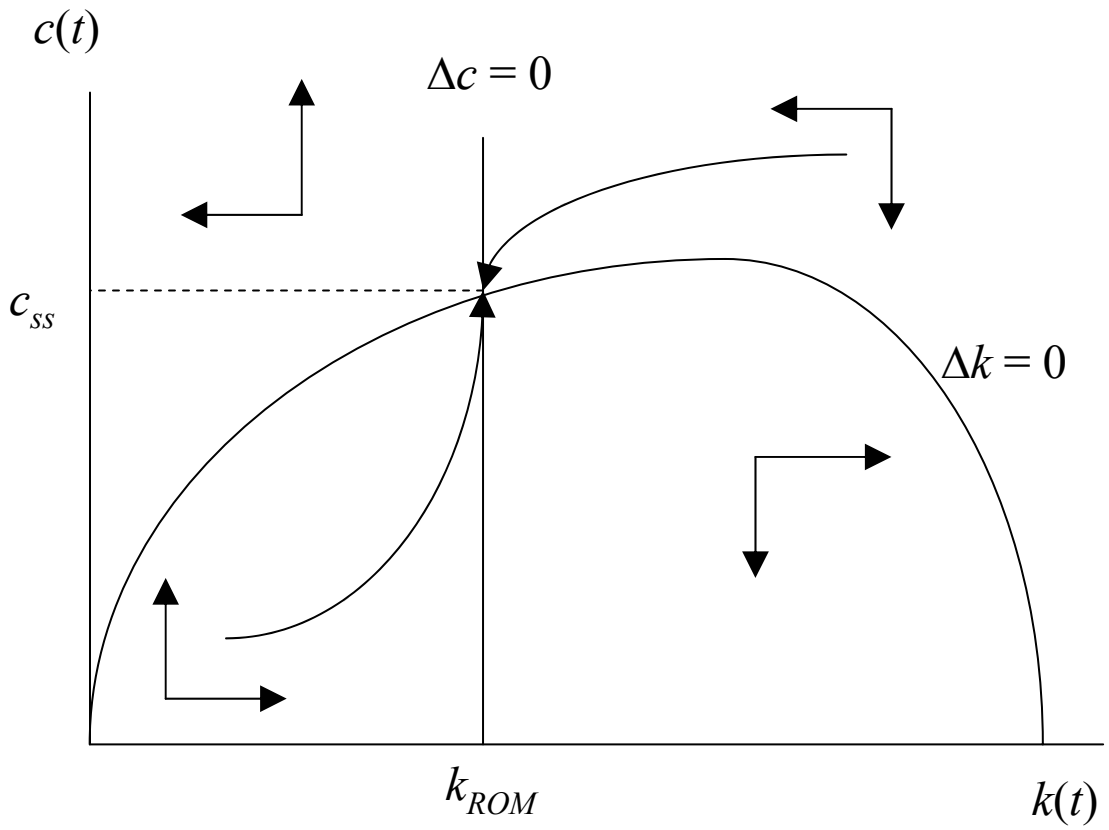
$$k(0) = k_0$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) k(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} u'[c(t)] k(t) = 0.$$

h. La forma de ver lo que las condiciones (G1) y (G2) nos dicen es la siguiente. En un momento t el pozo tiene petróleo en cantidad $k(t)$. Como no se produce petróleo, la variación en el stock de petróleo siempre es negativa para cualquier valor de k y de c ($\Delta k(t) < 0$). Esto lo representamos con una flecha (\leftarrow) en el plano. Por otro lado, según (G1) $\Delta c(t) < 0$, también para cualquier valor de k y c . Esto quiere decir que siempre preferiremos una secuencia de consumo decreciente donde consumamos más al principio y menos al final. Esto lo representamos con una flecha (\downarrow) en el plano. En el segundo gráfico al final del documento se representa la evolución del consumo y el stock de petróleo en este caso.

Diagrama de fases apartado d)



Evolución temporal apartado d)

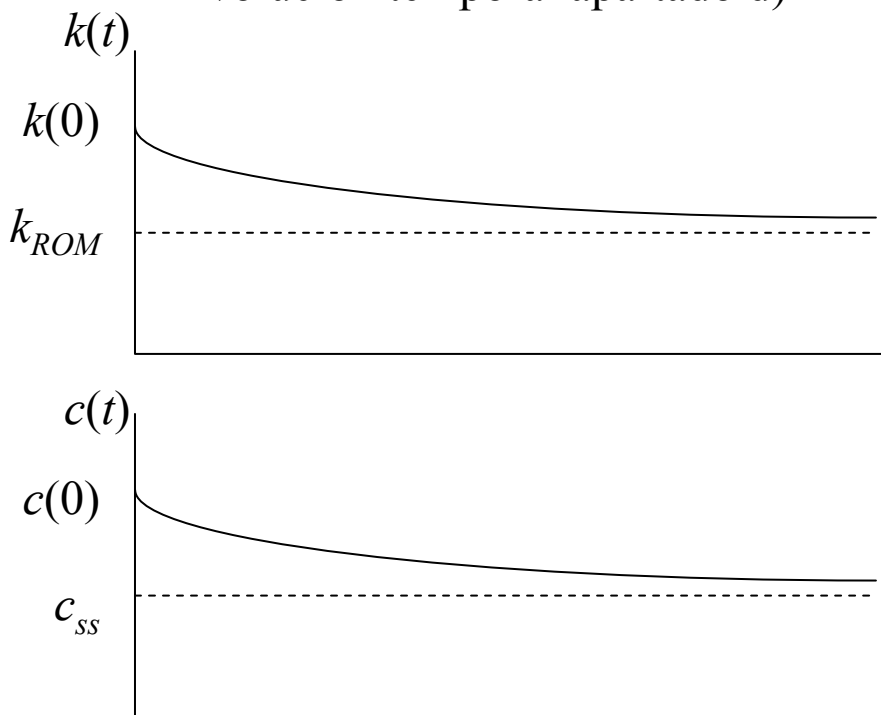
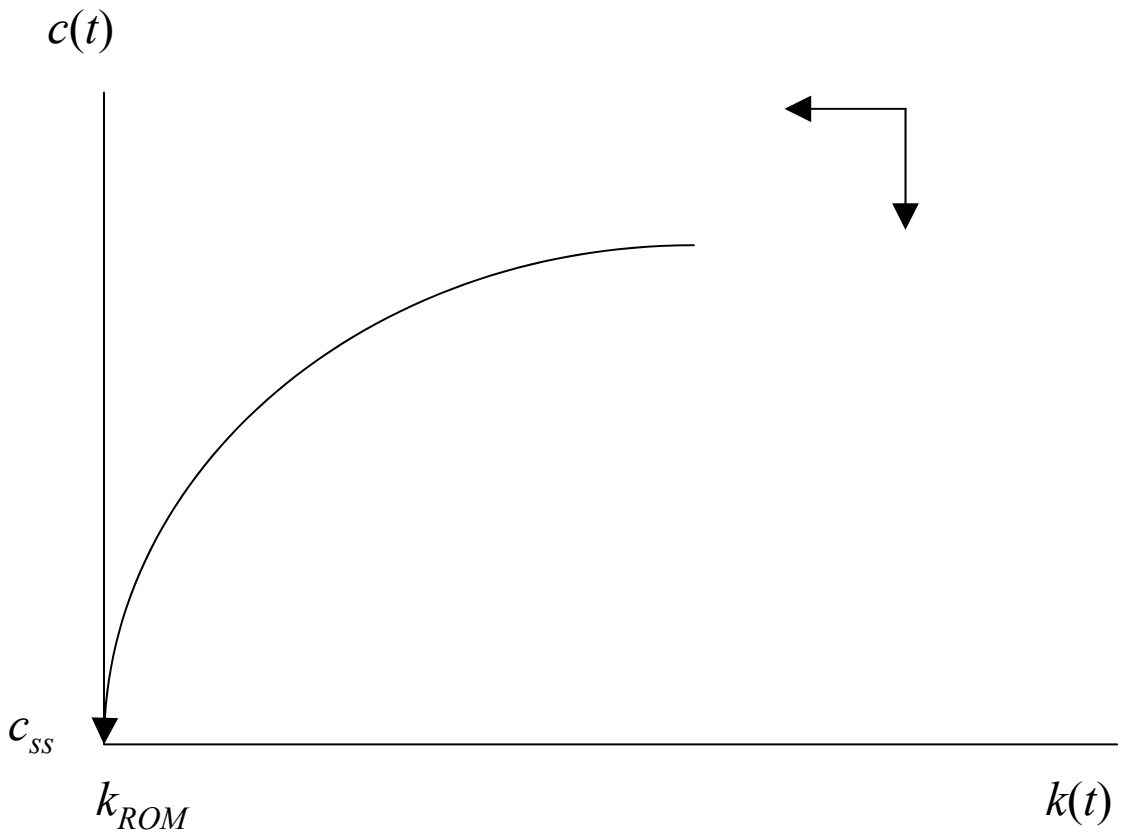


Diagrama de fases apartado h)



Evolución temporal apartado h)

