

**Hoja de ejercicios 6**  
(Soluciones)

**Ejercicio 1. La desaceleración de la productividad y el ahorro**

Considere una economía como la descrita en el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans. La población  $[L(t)]$  crece a la tasa  $n$ . El nivel de eficiencia del trabajo  $[E(t)]$  crece a la tasa  $g$ . Si un individuo consume la cantidad  $z$ , su utilidad instantánea viene representada por la función

$$u(z) = \frac{z^{1-\theta} - 1}{1-\theta}.$$

La economía empieza con un stock de capital agregado  $K(0) = K_0$ , dado. Defina con letras mayúsculas variables agregadas de la economía y con minúsculas las variables por unidad de eficiencia. Por lo tanto, para cada variable  $X(t)$ , las variables per cápita se calculan como  $X(t)/L(t)$ .

- a. Escriba el problema de decisión del Planificador Social
- b. Caracterice la solución del Problema del Planificador Social como un sistema de ecuaciones en diferencias en  $k$  y  $c$ . Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones diferenciales, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones en diferencias.

Suponga que la economía se encuentra en su senda de crecimiento sostenido desde el período 0. En un período  $T_2 > 0$  el nivel de productividad del trabajo,  $E(T)$ , disminuye de forma inesperada y permanente. Esto quiere decir que nadie anticipa el cambio en  $E$  hasta que llega el momento  $T_2$  y cuando llega, los agentes reconocen que va a permanecer para siempre.

- c. ¿Qué efecto tiene este acontecimiento sobre la curva  $\Delta k = 0$  (si es que lo tiene)?
- d. ¿Qué efecto tiene este acontecimiento sobre la curva  $\Delta c = 0$  (si es que lo tiene)?
- e. ¿Qué sucede con  $c$  en el momento del cambio? ¿Qué sucede con  $k$  en el momento del cambio?
- f. Represente la evolución temporal del nivel tecnológico, del consumo per cápita y del capital per cápita. [Nota: Para responder a esta pregunta

analice el cambio en el diagrama de fases y traslade esa información a un gráfico donde represente en el eje horizontal el tiempo desde 0 hasta el infinito y en el vertical el logaritmo del nivel tecnológico, del consumo o del capital per cápita]

Suponga que la economía se encuentra en su senda de crecimiento sostenido desde el período 0. En vez de un cambio en el nivel tecnológico, suponga que en el período  $T_2 > 0$  es la tasa de crecimiento de la productividad,  $g$ , la que disminuye.

**g.** ¿Qué efecto tiene este acontecimiento sobre la curva  $\Delta k = 0$  (si es que lo tiene)?

**h.** ¿Qué efecto tiene este acontecimiento sobre la curva  $\Delta c = 0$  (si es que lo tiene)?

A continuación analizaremos el efecto del cambio en  $g$  sobre el consumo y capital per cápita. Para ello analizaremos 4 casos. En el primer caso, vamos a suponer que el cambio es inesperado y permanente. Esto quiere decir que nadie anticipa el cambio en  $g$  hasta que llega el momento  $T_2$  y cuando llega, los agentes reconocen que va a permanecer para siempre?

**i.** ¿Qué sucede con  $c$  en el momento del cambio? ¿Qué sucede con  $k$  en el momento del cambio?

**j.** Represente la evolución temporal del nivel tecnológico, del consumo per cápita y del capital per cápita. [La misma nota del apartado (f) aplica aquí.] Compare con su respuesta en el apartado (f)

En el segundo caso, vamos a suponer que el cambio es esperado y permanente. Esto quiere decir que en un período anterior a  $T_2$ , por ejemplo  $T_1 < T_2$ , aparece la información que en el período  $T_2$  va a ocurrir el cambio. Además, los agentes reconocen que el cambio va a permanecer para siempre

**k.** ¿Qué sucede con  $c$  en el momento del cambio? ¿Qué sucede con  $k$  en el momento del cambio?

**l.** Represente la evolución temporal del nivel tecnológico, del consumo per cápita y del capital per cápita. [La misma nota del apartado (f) aplica aquí.] Compare con su respuesta en el apartado (j)

En el tercer caso, vamos a suponer que el cambio es inesperado y transitorio. Esto quiere decir que nadie anticipa el cambio hasta que llega el momento  $T_2$ . Sin embargo, cuando llega, los agentes reconocen que en un período posterior  $T_3 > T_2$  la tasa de crecimiento de la tecnología  $g$  va a volver al nivel inicial.

**m.** ¿Qué sucede con  $c$  en el momento del cambio? ¿Qué sucede con  $k$  en el momento del cambio?

**n.** Represente la evolución temporal del nivel tecnológico, del consumo per cápita y del capital per cápita. [La misma nota del apartado (f) aplica aquí.] Compare con su respuesta en el apartado (j)

Por último, vamos a suponer que el cambio es esperado y transitorio. Esto quiere decir que en un período anterior a  $T_2$ , por ejemplo  $T_1 < T_2$ , aparece la información que en el período  $T_2$  va a ocurrir el cambio. Además, los agentes reconocen que en un período posterior  $T_3 > T_2$  la tasa de crecimiento de la tecnología  $g$  va a volver al nivel inicial.

**ñ.** ¿Qué sucede con  $c$  en el momento del cambio? ¿Qué sucede con  $k$  en el momento del cambio?

**o.** Represente la evolución temporal del nivel tecnológico, del consumo per cápita y del capital per cápita. [La misma nota del apartado (f) aplica aquí.] Compare con su respuesta en el apartado (j)

### Soluciones

**a.** El problema del planificador en términos agregados es elegir las trayectorias de  $C(t)$  y  $K(t)$  para maximizar la función

$$\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t \frac{[C(t)/L(t)]^{1-\theta}}{1-\theta}. \quad ((A1))$$

sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} C(t) + K(t+1) - (1-\delta)K(t) &= F[K(t), E(t)L(t)] \quad ((A2)) \\ K(0) &= K_0 \text{ dado} \\ K(t) &\geq 0; C(t) \geq 0. \end{aligned}$$

donde  $E(t)$  representa el progreso tecnológico.

Rescribamos este modelo en términos de unidades de eficiencia. Sean  $c = C/(EL)$  y  $k = K/(EL)$  el consumo y el capital por unidad de eficiencia, respectivamente. Además, supongamos que  $A(0) = L(0) = 1$ . Dividiendo ambos lados de la ecuación (2) por  $EL$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{C(t)}{E(t)L(t)} + \frac{K(t+1)}{E(t)L(t)} - (1-\delta)\frac{K(t)}{E(t)L(t)} &= \frac{F[K(t), E(t)L(t)]}{E(t)L(t)} \\ c(t) + \frac{E(t+1)L(t+1)}{E(t)L(t)} \frac{K(t+1)}{E(t+1)L(t+1)} - (1-\delta)k(t) &= F\left[\frac{K(t)}{E(t)L(t)}, 1\right] \end{aligned}$$

$$c(t) + (1 + n + g)k(t + 1) - (1 - \delta)k(t) = f[k(t)].$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} K(0) &= K_0 \text{ dado} \\ \frac{K(0)}{E(0)L(0)} &= \frac{K_0}{E(0)L(0)} \text{ dado} \\ k(0) &= k_0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

Por último

$$\begin{aligned} K(t) &\geq 0; \quad C(t) \geq 0, \\ \frac{K(t)}{E(t)L(t)} &\geq 0; \quad \frac{C(t)}{E(t)L(t)} \geq 0, \\ k(t) &\geq 0; \quad c(t) \geq 0. \end{aligned}$$

Por último, la función objetivo

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t \frac{[C(t)/L(t)]^{1-\theta}}{1-\theta} &= \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t \frac{E(t)^{1-\theta} [C(t)/E(t)L(t)]^{1-\theta}}{1-\theta} \\ &= E(0)^{1-\theta} \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t \frac{(1+g)^{(1-\theta)t} c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} \\ &= E(0)^{1-\theta} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}, \end{aligned}$$

con  $\beta = \gamma(1+g)^{1-\theta}$ . Por lo tanto, el problema del planificador, expresado en términos per cápita es elegir la secuencia  $\{c(t), k(t+1)\}_{t=0}^{\infty}$  para maximizar

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}$$

sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} c(t) + (1 + n + g)k(t + 1) - (1 - \delta)k(t) &= f[k(t)], \\ k(0) &= k_0 \text{ dado,} \\ k(t) &\geq 0; \quad c(t) \geq 0. \end{aligned}$$

**(b)** Caracterice la solución al problema del Planificador Social

El Lagrangiano del problema es

$$L[\{c(t), k(t), \lambda(t)\}_{t=0}^{\infty}] = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} + \lambda(t) [f[k(t)] - c(t) - (1+n+g)k(t+1) + (1-\delta)k(t)] \right\}.$$

Las condiciones necesarias (y suficientes en este caso) son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\cdot)}{\partial c(t)} &= \beta^t [c(t)^{-\theta} - \lambda(t)] = 0 \\ \frac{\partial L(\cdot)}{\partial k(t)} &= -\beta^t(1+n+g)\lambda(t) + \beta^{t+1}\lambda(t+1) [f'[k(t)] + 1 - \delta] = 0 \\ \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \lambda(t)} &= \beta^t [f[k(t)] - c(t) - (1+n)k(t+1) + (1-\delta)k(t)] = 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se pueden resumir en

$$\begin{aligned} c(t)^{-\theta} &= \lambda(t) \\ (1+n+g)\lambda(t) &= \beta\lambda(t+1) [f'[k(t)] + 1 - \delta] \\ f[k(t)] &= c(t) + (1+n+g)k(t+1) - (1-\delta)k(t). \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\lambda$  en la segunda ecuación, aparece el sistema en diferencias en  $c$  y  $k$

$$(1+n+g)c(t)^{-\theta} = \beta c(t+1)^{-\theta} [f'[k(t)] + 1 - \delta] \quad ((B1))$$

$$f[k(t)] = c(t) + (1+n)k(t+1) - (1-\delta)k(t). \quad ((B2))$$

Las condiciones de contorno son la condición inicial

$$k(0) = k_0 \text{ dado,}$$

y la condición de transversalidad

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)k(t) = 0.$$

(c) De (B2) vemos que la curva  $\Delta k(t) = 0$  esta descrita por la ecuación

$$c = f(k) - (\delta + g + n)k.$$

Puesto que esta ecuación no depende en forma directa de  $E(t)$ , podemos concluir que el cambio en  $E(t)$  no tiene ningún efecto sobre la curva  $\Delta k(t) = 0$ .

(d) La ecuación (B1) nos indica la dinámica óptima de  $c(t)$ . Asumiendo que  $c(t) \neq 0$ , vemos que la curva  $\Delta k(t) = 0$  esta descrita por la ecuación

$$\frac{1}{\beta} = f'(k) + 1 - \delta - g - n$$

la cual es una recta vertical en el plano  $(k, c)$ . Puesto que esta ecuación no depende en forma directa de  $E(t)$ , podemos concluir que el cambio en  $E(t)$  no tiene ningún efecto sobre la curva  $\Delta c(t) = 0$ .

(e) Comencemos por ver que sucede con  $k$  en el momento del cambio. Sabemos que  $k(T_2) = K(T_2)/[E(T_2)L(T_2)]$ . Como en el momento  $T_2$  tanto  $K(T_2)$  como  $L(T_2)$  están dados, si  $E(T_2)$  disminuye de forma inesperada en el periodo  $T_2$ , entonces  $k(T_2)$  aumenta. Lo mismo podemos decir para  $c(T_2) = C(T_2)/[E(T_2)L(T_2)]$ . Sin embargo, este aumento de  $c(T_2)$  no es necesariamente proporcional a la disminución de  $E(T_2)$ , ya que  $c(T_2)$  es una variable de control. El aumento de  $c(T_2)$  será lo suficiente para regresar a la trayectoria estable (ver figura 1 al final del documento).

(f) Denotemos por  $\hat{c} = C/L$  y  $\hat{k} = K/L$  al consumo y capital per cápita. Dado que  $c = C/AL = \hat{c}/A$ , se sigue que  $g_c = g_{\hat{c}} - g_E$ , donde  $g_x$  denota la tasa de crecimiento de la variable  $x$ . Por tanto, como  $c$  es constante en el estado estacionario, obtenemos que  $g_c = g_{\hat{c}} - g_A = 0$  y así,  $g_{\hat{c}} = g_A = g$ . Lo mismo ocurre con la tasa de crecimiento del capital per cápita,  $g_{\hat{k}} = g_A = g$ . Es decir, la tasa de crecimiento del consumo y el capital per cápita en el estado estacionario es  $g$ .

Puesto que  $E(t) = (1 + g)^t$ , entonces  $\ln(E(t)) = gt$  para  $t \in [0, T_2]$ . En el momento  $T_2$ ,  $E(T_2)$  decrece de forma inesperada y permanente y de ahí en adelante sigue creciendo a la misma tasa  $g$ . Por tanto,  $\ln(E(t)) = \ln(E(T_2)) + g(t - T_2)$  para  $t \geq T_2$ . La figura 2a muestra la evolución temporal de  $\ln[E(t)]$ .

Dado que  $\hat{c} = cE$ , entonces  $\ln[\hat{c}(t)] = \ln[c(t)] + \ln[E(t)]$ . Del diagrama de fase (figura 1) podemos ver que tanto  $k$  como  $c$  saltan al momento del cambio a los valores  $k_N$  y  $c_N$ , y luego decrecen hasta converger al estado estacionario. Por tanto, de 0 a  $T_2$ ,  $c(t) = c_{ss}$  y a largo plazo  $c(t)$  tiende nuevamente a este valor. De esta forma  $\ln[\hat{c}(t)]$  tiende a largo plazo a  $\ln[c_{ss}] + \ln[E(t)]$  (la línea punteada en la figura 2c). En el momento  $T_2$  habrá un salto que dependerá de el aumento de  $c(T_2)$  y la disminución de  $E(T_2)$ . La figura 2c muestra tres posibles trayectorias de  $c(t)$ .

El mismo análisis lo podemos aplicar a  $\hat{k}$ . Sin embargo, en este caso sólo existe una posible trayectoria ya que en el momento del cambio  $K$  y  $L$  son

fijos y no pueden saltar. La trayectoria de  $\ln [\widehat{k}(t)]$  se muestra en la figura 2b.

(g) Para un nivel de  $k$  dado, el nivel de  $c$  para el cual  $\Delta k(t) = 0$  es  $c = f(k) - (\delta + g + n)k$ . Así, si  $g$  se reduce y  $k$  está fijo, el nivel de  $c$  consistente con  $\Delta k(t) = 0$  debe ser ahora mayor que antes. Es decir, la curva  $\Delta k(t) = 0$  se mueve hacia arriba (ver la figura 3).

(h) Igual que en el apartado (d) la curva  $\Delta c(t) = 0$  esta descrita por la ecuación  $1/\beta = f'(k) + 1 - \delta - g - n$ . Si  $g$  decrece,  $k$  ha de crecer puesto que  $f'(k)$  es una función. Gráficamente, la curva  $\Delta c(t) = 0$  se mueve hacia la derecha (ver la figura 3).

(i) Justo en el momento en que  $g$  decrece el valor de  $k$  esta dado por la historia de la economía y no puede cambiar de forma discontinua. Sin embargo,  $c$  si que puede cambiar en forma discontinua en el momento en que  $g$  decrece. Para que la economía alcance su nuevo trayectoria de silla,  $c$  debe saltar lo suficiente en el instante del cambio para alcanzar la trayectoria de silla y a partir de ahí seguir tal senda hasta llegar al nuevo estado estacionario  $S_N$ . No obstante, no sabemos si la trayectoria pasa por encima o por debajo del viejo equilibrio,  $S_o$ . En la figura 3 se han dibujado tres posibles trayectorias de silla. Así que no sabemos si  $c$  salta hacia arriba o hacia abajo en el momento del cambio. Incluso prodría ser que la senda pasase justo por  $S_o$ .

(j) Puesto que  $E(t) = (1 + g)^t$ , entonces  $\ln(E(t)) = gt$  para  $t \in [0, T_2)$ . En el momento  $T_2$ ,  $g$  decrece de forma inesperada y permanente. Denotemos la nueva tasa de crecimiento como  $g_N$ . Por tanto,  $\ln(E(t)) = \ln(E(T_2)) + g_N(t - T_2)$  para  $t \geq T_2$ . La figura 4a muestra la evolución temporal de  $\ln[E(t)]$ .

Sabemos que la tasa de crecimiento del consumo y el capital per cápita en el estado estacionario es  $g_N$ . Por tanto, una reducción en  $g$  implica una tasa de crecimiento menor de estas variables a largo plazo. Dado que  $\widehat{c} = cE$ , entonces  $\ln[\widehat{c}(t)] = \ln[c(t)] + \ln[E(t)]$ . Del apartado (h) sabemos que  $c$  salta al momento del cambio, y luego sigue creciendo hasta converger al nuevo estado estacionario  $S_N$ . Por tanto, de 0 a  $T_2$ ,  $c(t) = c_0$  y a largo plazo  $c(t)$  tiende a  $c_N$ . De esta forma  $\ln[\widehat{c}(t)]$  tiende a largo plazo a  $\ln[c_N] + \ln[E(t)]$  (la línea punteada en la figura 4c). En el momento  $T_2$  habrá un salto que dependerá de el aumento o disminución de  $c(T_2)$ . La figura 4c muestra tres posibles trayectorias de  $c(t)$ .

El mismo análisis lo podemos aplicar a  $\widehat{k}$ . Sin embargo, en este caso sólo existe una posible trayectoria ya que en el momento del cambio  $K$  y  $L$  son

fijos y no pueden saltar. La trayectoria de  $\ln \left[ \widehat{k}(t) \right]$  se muestra en la figura 4b.

**(k)** A partir de este apartado vamos a suponer que la nueva trayectoria de silla pasa por encima del estado estacionario antiguo. En el momento  $T_1$  cuando la economía recibe la información de que va a haber un cambio en el futuro se anticipa para estar en la nueva trayectoria de silla en el momento del cambio. Eso significa que el consumo  $c$  ha de aumentar e ir convergiendo a la nueva trayectoria de silla a la que llegará en  $T_2$ . En el momento en que se recibe la información el capital está ya decidido por lo que no cambia. A medida que el consumo aumenta el capital empieza a disminuir y a partir de  $T_2$  aumenta para converger al nuevo estado estacionario. La figura 5 muestra el diagrama de fases.

**(l)** La figura 6 muestra las trayectorias del capital y el consumo para el caso en que la trayectoria de silla se encuentra por encima del antiguo estado estacionario.

**(m)** Como en el apartado (i) no pasa nada hasta que llegamos a  $T_2$ . Como los agentes saben que el cambio es transitorio, harán que el consumo aumente en el momento del cambio. Este aumento ha de garantizar que la economía volverá a estar en la trayectoria de silla cuando en  $T_3$  la economía vuelva a los niveles anteriores de  $g$ . Con respecto a  $k$ , no varía en el momento del cambio. A partir de entonces primero aumenta y luego disminuye para llegar al nivel inicial. La figura 7 muestra el diagrama de fases.

**(n)** La figura 8 muestra las trayectorias de la tecnología, capital y consumo para el caso en que la trayectoria de silla se encuentra por encima del antiguo estado estacionario.

**(ñ)** Como en el apartado (k) los agentes se anticipan al cambio cuando reciben la información en  $T_1$ . Han de calcular el salto en el consumo que les lleve a la trayectoria de silla que existirá en el momento  $T_3$  que es la que se mantendrá hasta el infinito. El capital no cambia en  $T_1$ . Sin embargo, el aumento del consumo hace que primero caiga para después aumentar y volver al estado estacionario. La figura 9 muestra el diagrama de fases.

**(o)** La figura 10 muestra las trayectorias de la tecnología, capital y consumo para el caso en que la trayectoria de silla con  $g$  menor se encuentra por encima del antiguo estado estacionario

Figura 1: Diagrama de fases apartado e)

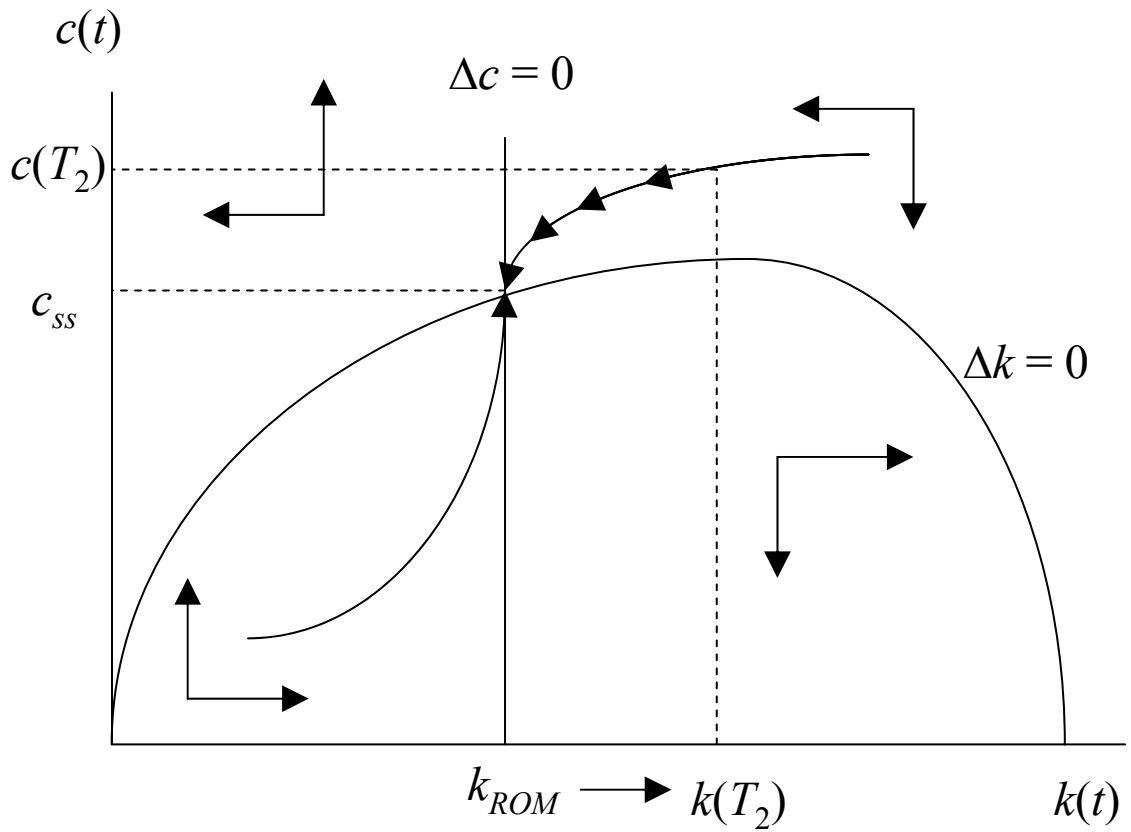


Figura 2: Evolución variables apartado f)

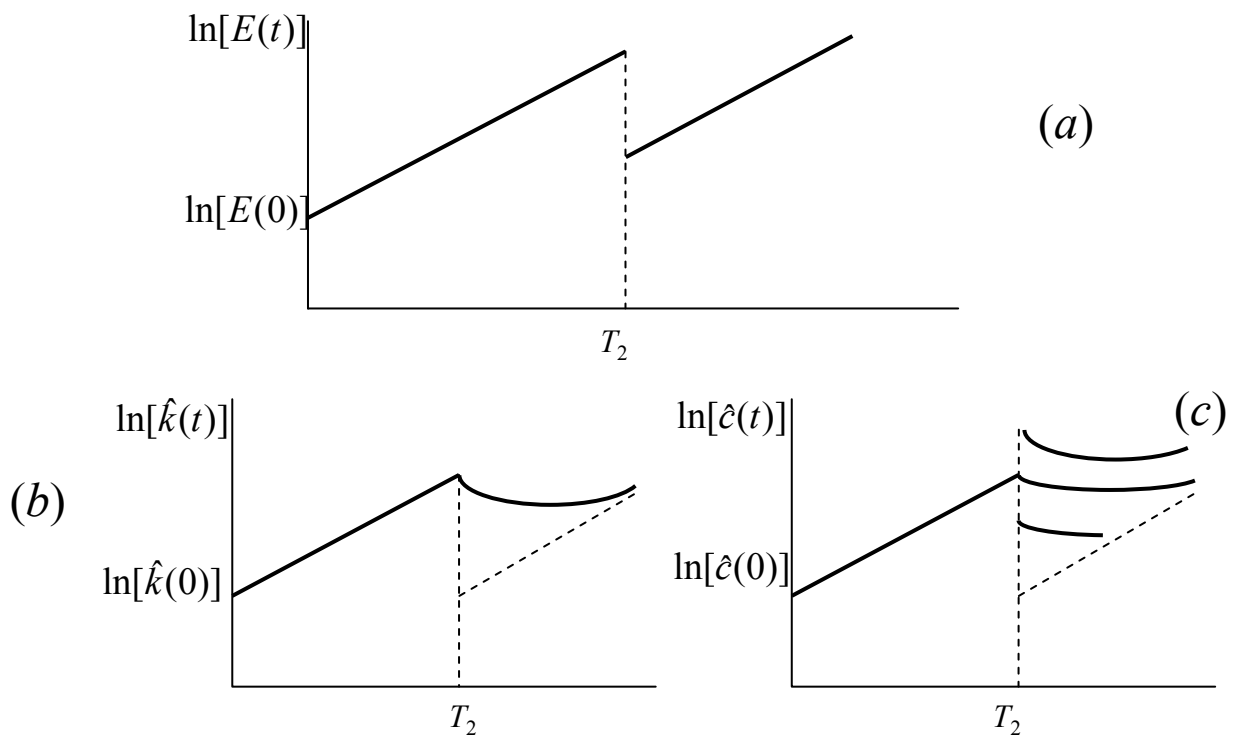


Figura 3: Diagrama de fases apartado h)

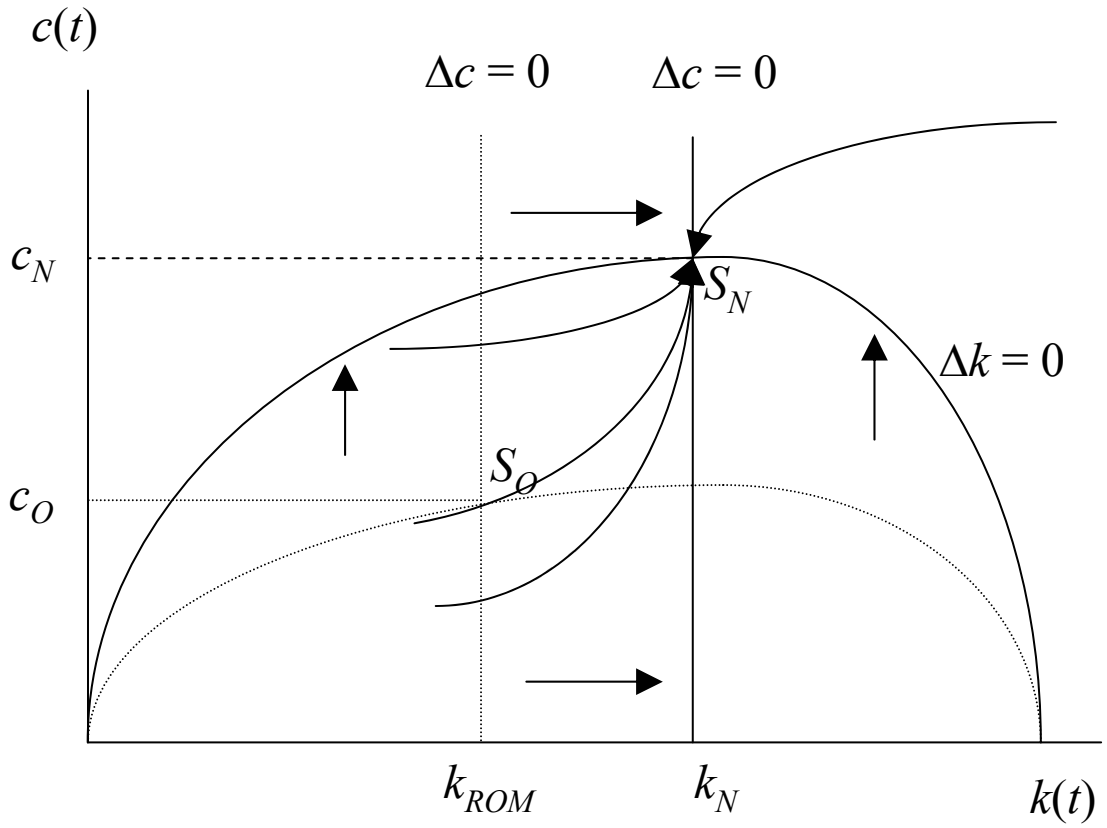


Figura 4: Evolución variables apartado j)

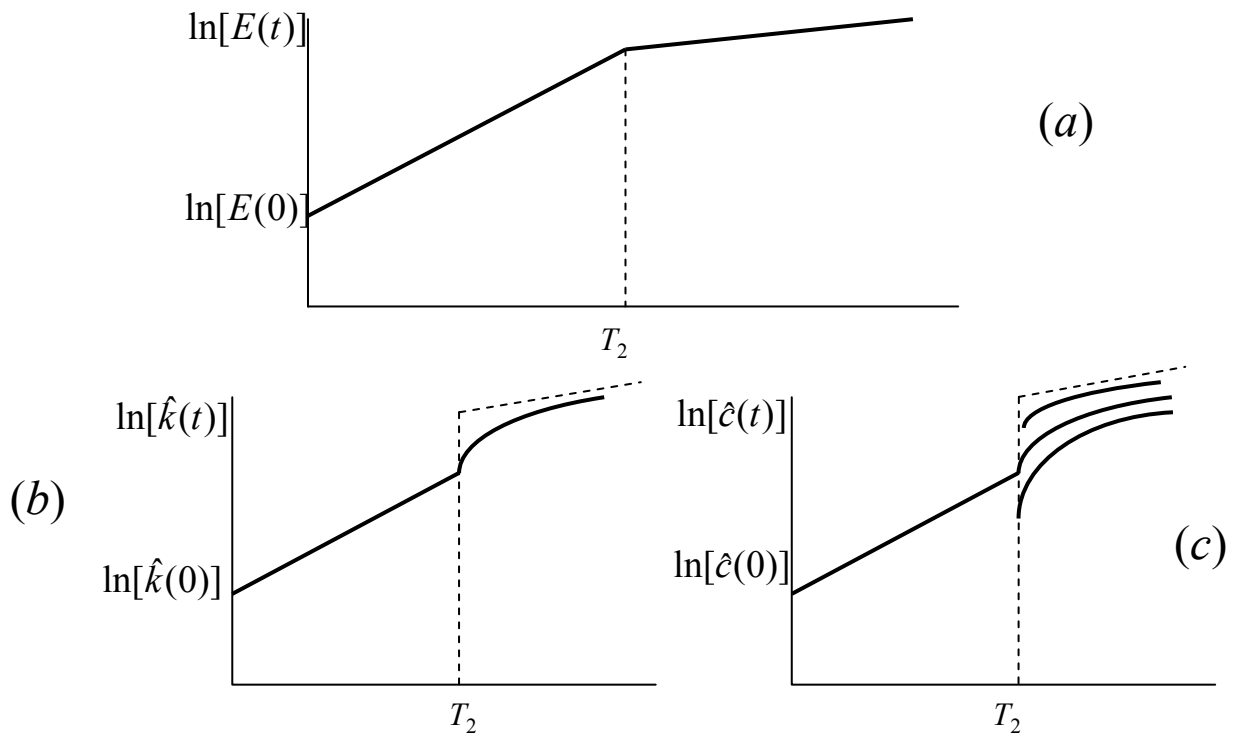


Figura 5: Diagrama de fases apartado k)

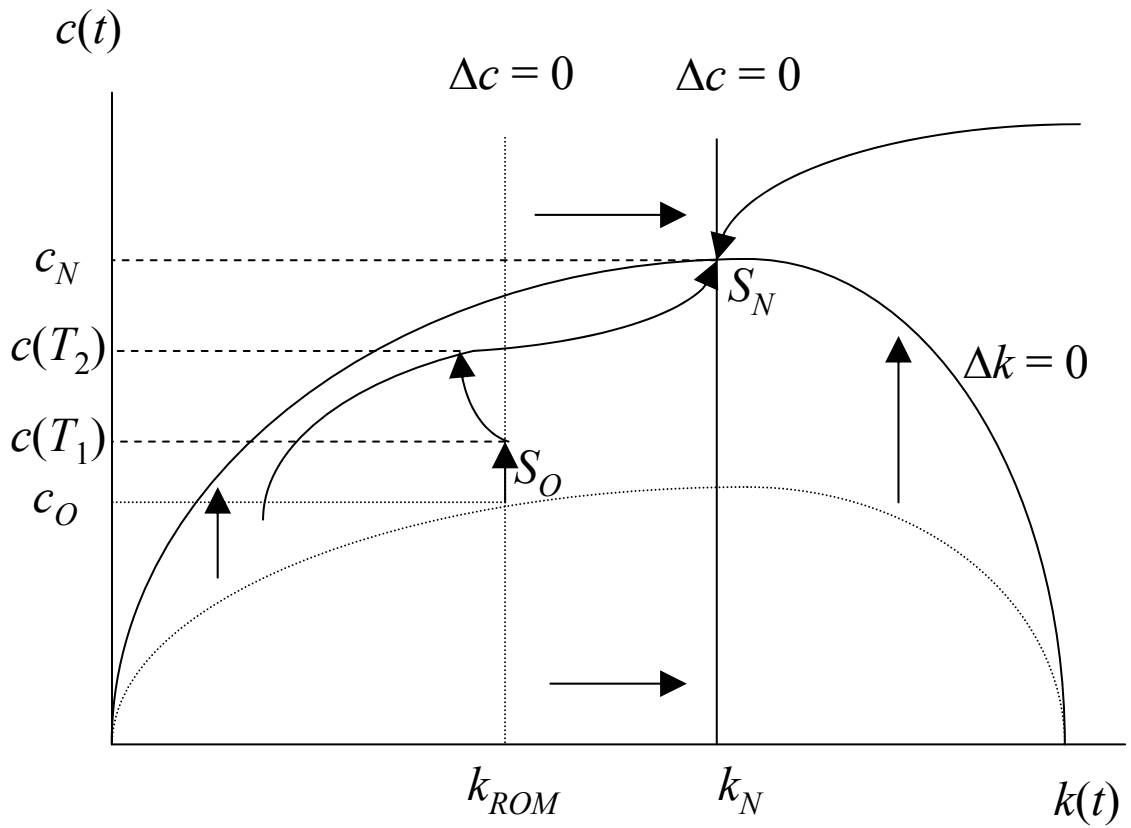


Figura 6: Evolución variables apartado j)

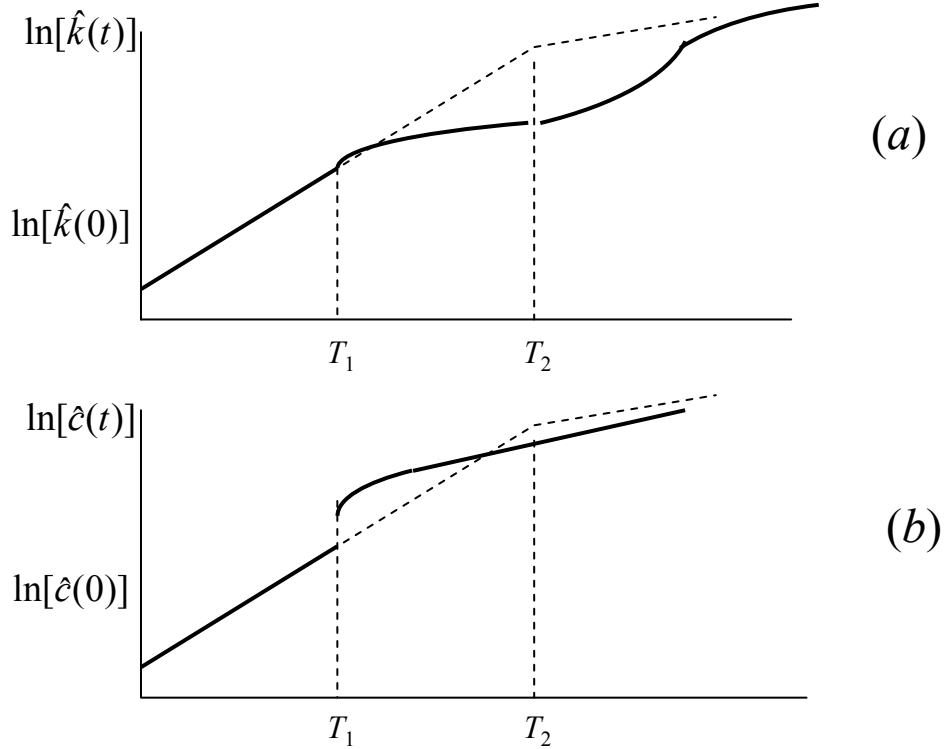


Figura 7: Diagrama de fases apartado m)

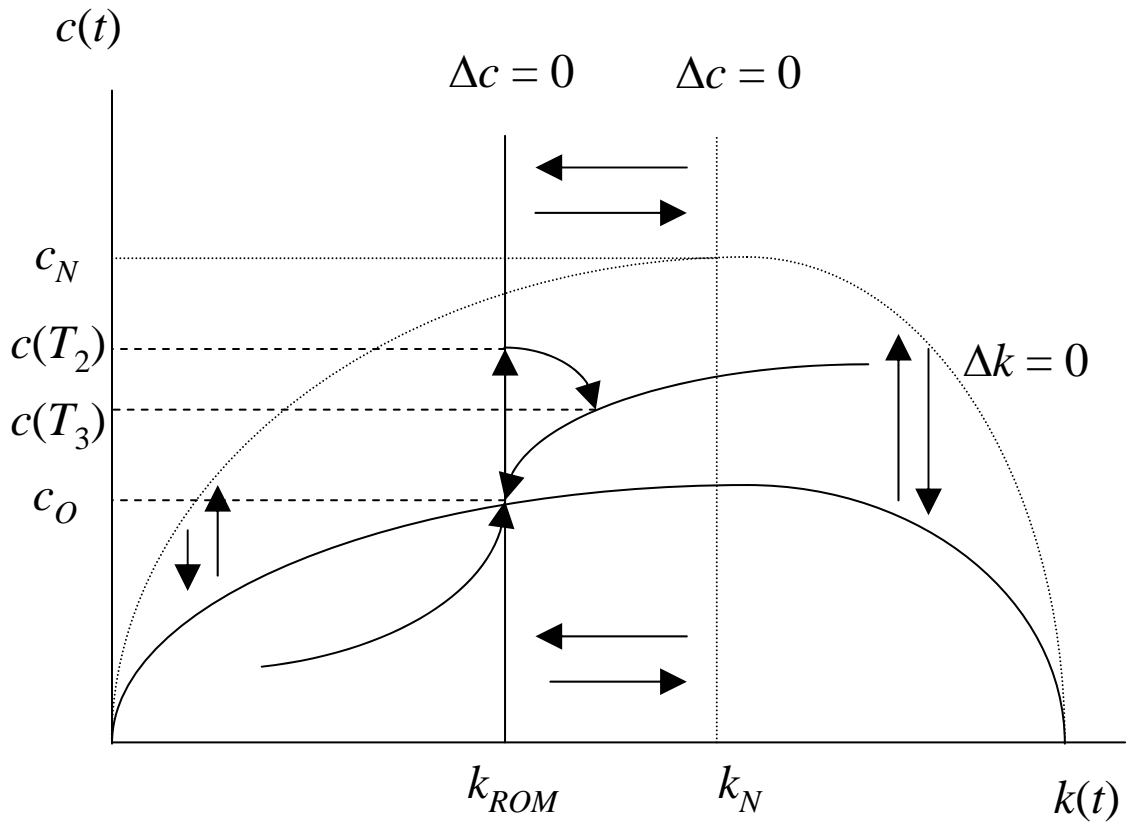


Figura 8: Evolución variables apartado n)

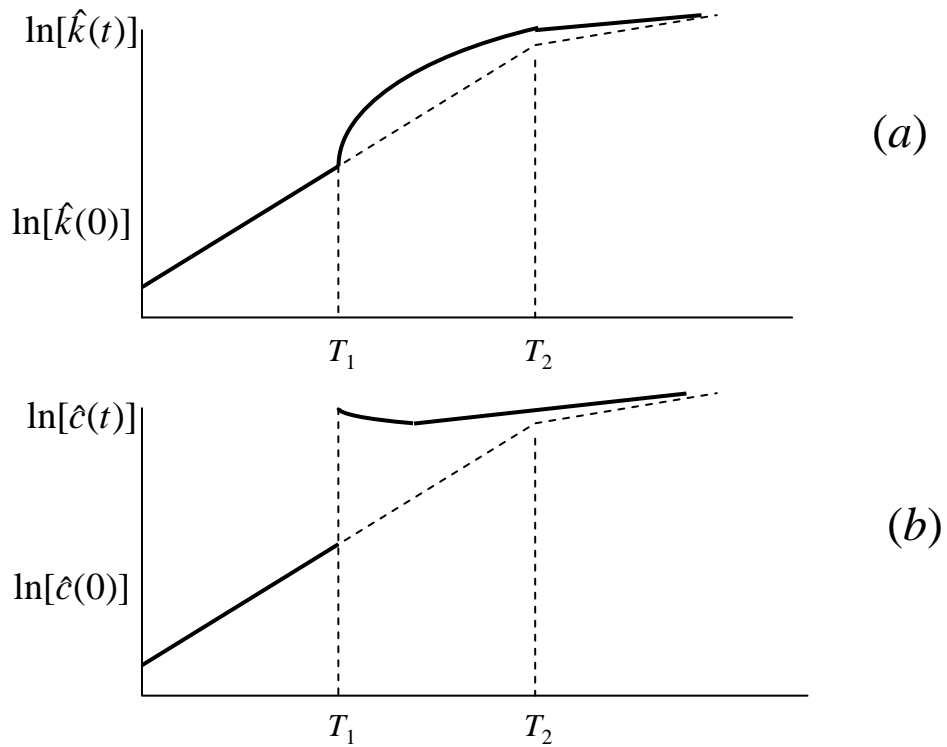


Figura 9: Diagrama de fases apartado ñ)

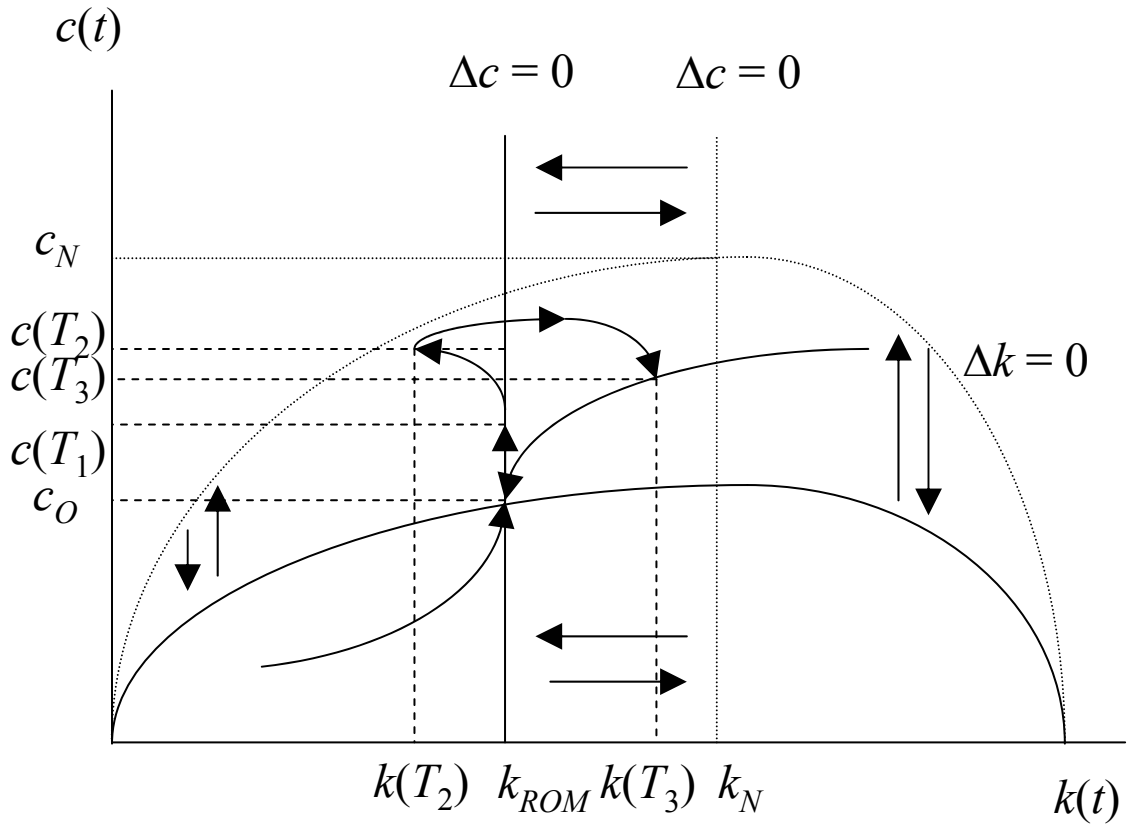


Figura 10: Evolución variables apartado o)

