

**Hoja de ejercicios 7**  
(Soluciones)

**Ejercicio 1. El papel de los mercados financieros**

Considere el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans de horizonte infinito y tiempo discreto. La tasa de crecimiento de la población es  $n = 0$ . Cada agente tiene una tasa de descuento intertemporal de  $0 < \beta < 1$ . No hay crecimiento exógeno de la productividad ( $g = 0$ ). Cada agente de esta economía tiene unas preferencias iguales a

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln [c(t)]$$

donde  $u$  es una función estrictamente creciente y cóncava y  $c$  es consumo per cápita.

En primer lugar, suponga que este individuo vive aislado. En cada período  $t$ , este agente dispone de una unidad de tiempo que le reporta siempre la misma cantidad de bienes  $y(t) = y$ . Como vive aislado, no puede ahorrar ni pedir prestado, por lo que está restringido a consumir su renta en cada período. Esto implica que  $c(t) = y$ , para todo  $t$ .

Suponga ahora que este agente sigue viviendo solo pero que aprende una técnica para almacenar parte de los bienes que produce. La variable  $a(t)$  representa la cantidad de bienes que tiene almacenados en el período  $t$  y  $a(t + 1) - a(t)$  es el cambio que experimenta las existencias almacenadas entre el período  $t$  y el período  $t + 1$ . Suponga además que, por culpa del mal tiempo y de animales, una fracción  $\delta$  de lo que almacena se queda inservible. Por último, suponga que este agente comienza con el almacén vacío por lo que  $a(0) = 0$ .

- a.** Escriba el problema de decisión del consumidor incluyendo todas las restricciones que  $c(t)$  y  $a(t)$  han de cumplir.
- b.** Caracterice la solución del problema del consumidor como un sistema de ecuaciones en diferencias en  $a$  y  $c$ . Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones en diferencias, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones en diferencias.

c. Haga un diagrama de fases en el espacio  $(a, c)$ . Represente en el gráfico la trayectoria de consumo y almacenaje que resuelve el problema del consumidor.

Finalmente, suponga que este individuo se pone en contacto con una entidad financiera. Esta entidad, le permite prestar y pedir prestado al tipo de interés constante  $r(t) = r > 0$ . Ahora la variable  $a(t)$  representa la posición activa (si es positiva) o pasiva (si es negativa) del agente con respecto a la entidad financiera en el período  $t$  y  $a(t+1) - a(t)$  es el cambio en dicha posición entre los períodos  $t$  y  $t+1$ . El agente comienza con una posición igual a 0,  $a(0) = 0$ .

d. Escriba el problema de decisión del consumidor incluyendo todas las restricciones que  $c(t)$  y  $a(t)$  han de cumplir.

e. Caracterice la solución del problema del consumidor como un sistema de ecuaciones en diferencias en  $a$  y  $c$ . Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones en diferencias, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones en diferencias.

f. Haga un diagrama de fases en el espacio  $(a, c)$ . Represente en el gráfico la trayectoria de consumo y activos que resuelve el problema del consumidor. Compare con su respuesta en el apartado (c). En particular, compare los niveles de bienestar de este agente cuando vive solo y  $c(t) = y$  para todo  $t$ , cuando vive solo pero es capaz de almacenar bienes y cuando tiene acceso a una institución financiera.

### Soluciones

a. El problema que ha de resolver el agente es elegir la secuencia  $\{c(t), a(t)\}_{t=0}^{\infty}$  para maximizar su función objetivo

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln[c(t)],$$

sujeto a la restricción

$$c(t) + a(t+1) \leq y + (1 - \delta)a(t)$$

$$c(t) \geq 0, a(t) \geq 0,$$

$$a(0) = 0.$$

b. Para resolver el problema escribimos el Lagrangiano como

$$L[\{c(t), a(t), \lambda(t)\}_{t=0}^{\infty}] = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{u[c(t)] - \lambda(t)[c(t) + a(t+1) - y - (1-\delta)a(t)]\}.$$

Las condiciones necesarias (y suficientes en este caso) son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\cdot)}{\partial c(t)} &= \beta^t \left[ \frac{1}{c(t)} - \lambda(t) \right] = 0 \\ \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \lambda(t)} &= \beta^t [y + (1-\delta)a(t) - c(t) - a(t+1)] = 0. \end{aligned}$$

La condición de primer orden respecto a  $a(t)$  depende de si  $a(t)$  es mayor o igual a cero. Si  $a(t) > 0$ , la solución es interior y la condición es

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial a(t)} = -\beta^t \lambda(t) + \beta^{t+1} \lambda(t+1)(1-\delta) = 0.$$

Sin embargo, si  $a(t) = 0$  la condición es

$$-\beta^t \lambda(t) + \beta^{t+1} \lambda(t+1)(1-\delta) < 0.$$

Estas ecuaciones se pueden resumir en

$$\frac{1}{c(t)} = \lambda(t)$$

$$\lambda(t) = \beta \lambda(t+1)(1-\delta), \text{ si } a(t) > 0$$

$$\lambda(t) > \beta \lambda(t+1)(1-\delta), \text{ si } a(t) = 0$$

$$y = c(t) + a(t+1) - (1-\delta)a(t).$$

Sustituyendo  $\lambda$  en la segunda ecuación, aparece el sistema en diferencias en  $c$  y  $a$ . En el caso que  $a(t) > 0$ ,

$$\frac{c(t+1)}{c(t)} = \beta(1-\delta) \tag{B1}$$

$$y = c(t) + a(t+1) - (1-\delta)a(t). \tag{B2}$$

Las condiciones de contorno son la condición inicial

$$a(0) = 0,$$

y la condición de transversalidad

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)a(t) = 0.$$

**c.** Para calcular el diagrama de fases vemos que la recta  $\Delta c(t) = 0$  implica (si  $a(t) > 0$ )

$$1 = \beta(1 - \delta)$$

cosa que no es posible. Observando (B1) vemos que para cualquier  $c(t)$  ha de ser el caso que  $c(t+1) < c(t)$  por lo que el consumo, si  $a(t) > 0$  ha de ser decreciente. La línea  $\Delta a(t) = 0$  implica, de (B2)

$$c(t) = y - \delta a(t).$$

Nótese que  $\Delta a(t) = 0$  es una recta. El diagrama de fases se incluye al final del documento. Vemos que la trayectoria óptima implica eliminar cualquier almacenaje inicial que se tiene y converger al estado estacionario que implica  $a_{ss} = 0$ ,  $c_{ss} = y$ . Como el nivel inicial de almacenaje es  $a(0) = 0$  ya estamos en el estado estacionario y la decisión óptima es  $c(t) = y$ , para todo  $t$ . La razón de este resultado es sencilla. Como almacenar sólo genera un rendimiento negativo (la depreciación) no puede nunca compensar al individuo por esperar y, por lo tanto, no es óptimo almacenar.

**d.** El problema que ha de resolver el agente es elegir la secuencia  $\{c(t), a(t)\}_{t=0}^{\infty}$  para maximizar su función objetivo

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln[c(t)],$$

sujeto a la restricción

$$c(t) + a(t+1) \leq y + (1+r)a(t)$$

$$c(t) \geq 0,$$

$$a(0) = 0.$$

Nótese que ahora la posición activa del individuo puede ser positiva o negativa (tendría una deuda).

**e.** Para resolver el problema escribimos el Lagrangiano como

$$L[\{c(t), a(t), \lambda(t)\}_{t=0}^{\infty}] = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{u[c(t)] - \lambda(t)[c(t) + a(t+1) - y - (1+r)a(t)]\}.$$

Las condiciones necesarias (y suficientes en este caso) son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\cdot)}{\partial c(t)} &= \beta^t \left[ \frac{1}{c(t)} - \lambda(t) \right] = 0 \\ \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \lambda(t)} &= \beta^t [y + (1+r)a(t) - c(t) - a(t+1)] = 0.\end{aligned}$$

La condición de primer orden respecto a  $a(t)$  depende de si  $a(t)$  es mayor o igual a cero. Si  $a(t) \neq 0$ , la solución es interior y la condición es

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial a(t)} = -\beta^t \lambda(t) + \beta^{t+1} \lambda(t+1)(1+r) = 0.$$

Sin embargo, si  $a(t) = 0$  la condición es

$$-\beta^t \lambda(t) + \beta^{t+1} \lambda(t+1)(1+r) < 0.$$

Estas ecuaciones se pueden resumir en

$$\frac{1}{c(t)} = \lambda(t)$$

$$\lambda(t) = \beta \lambda(t+1)(1+r), \text{ si } a(t) > 0$$

$$\lambda(t) > \beta \lambda(t+1)(1+r), \text{ si } a(t) = 0$$

$$y = c(t) + a(t+1) - (1+r)a(t).$$

Sustituyendo  $\lambda$  en la segunda ecuación, aparece el sistema en diferencias en  $c$  y  $a$ . En el caso que  $a(t) \neq 0$ ,

$$\frac{c(t+1)}{c(t)} = \beta(1+r) \tag{B1}$$

$$y = c(t) + a(t+1) - (1+r)a(t). \tag{B2}$$

Las condiciones de contorno son la condición inicial

$$a(0) = 0,$$

y la condición de transversalidad es la de que no haya estrategias de Ponzi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{(1+r)^t} = 0.$$

f. Para calcular el diagrama de fases vemos que la recta  $\Delta c(t) = 0$  implica (si  $a(t) \neq 0$ )

$$1 = \beta(1 + r)$$

Observando (B1) vemos que si  $1 > \beta(1 + r)$  para cualquier  $c(t)$  ha de ser el caso que  $c(t + 1) < c(t)$ . En cambio si  $1 < \beta(1 + r)$  para cualquier  $c(t)$  ha de ser el caso que  $c(t + 1) > c(t)$ . La línea  $\Delta a(t) = 0$  implica, de (B2)

$$c(t) = y + ra(t).$$

Nótese que  $\Delta a(t) = 0$  es una recta. El diagrama de fases se incluye al final del documento. Vemos que la trayectoria depende de si  $\beta(1 + r)$  es mayor o menor que 1. La razón vuelve a tener que ver con si al individuo le compensa o no posponer consumo dependiendo de la rentabilidad del ahorro

Está claro que este individuo es capaz de alcanzar mayores niveles de bienestar cuando existe una institución financiera. Nótese que esta conclusión es independiente del nivel del tipo de interés. La razón es que cuando vive solo o cuando almacena está restringido a consumir siempre  $c(t) = y$ . Esta asignación siempre la tiene disponible con un mercado financiero. La diferencia es que ahora tiene acceso a otras asignaciones que pueden superar a esta en bienestar.

Diagrama de fases apartado c)

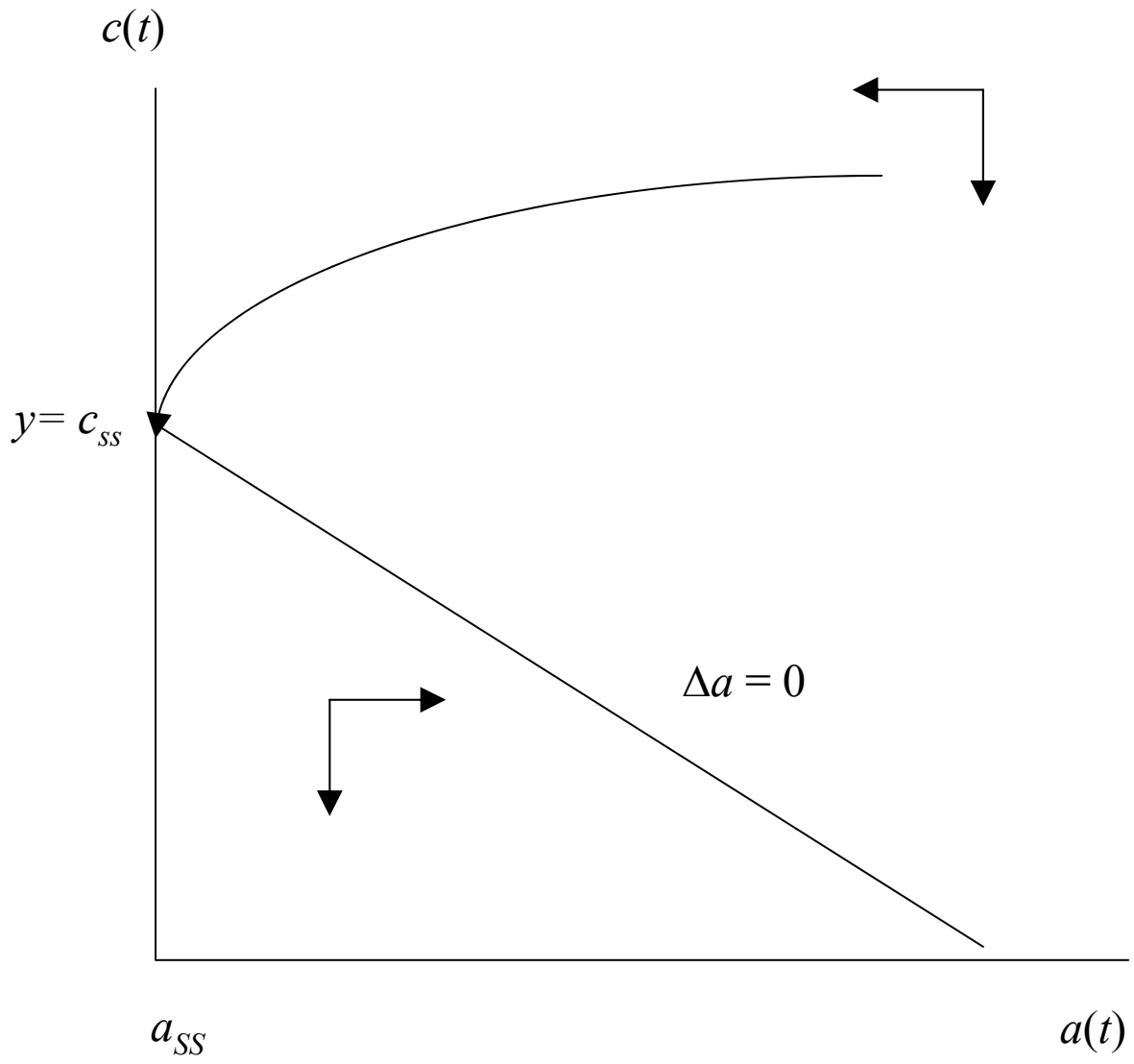


Diagrama de fases apartado f)

Caso  $\beta(1+r) > 1$

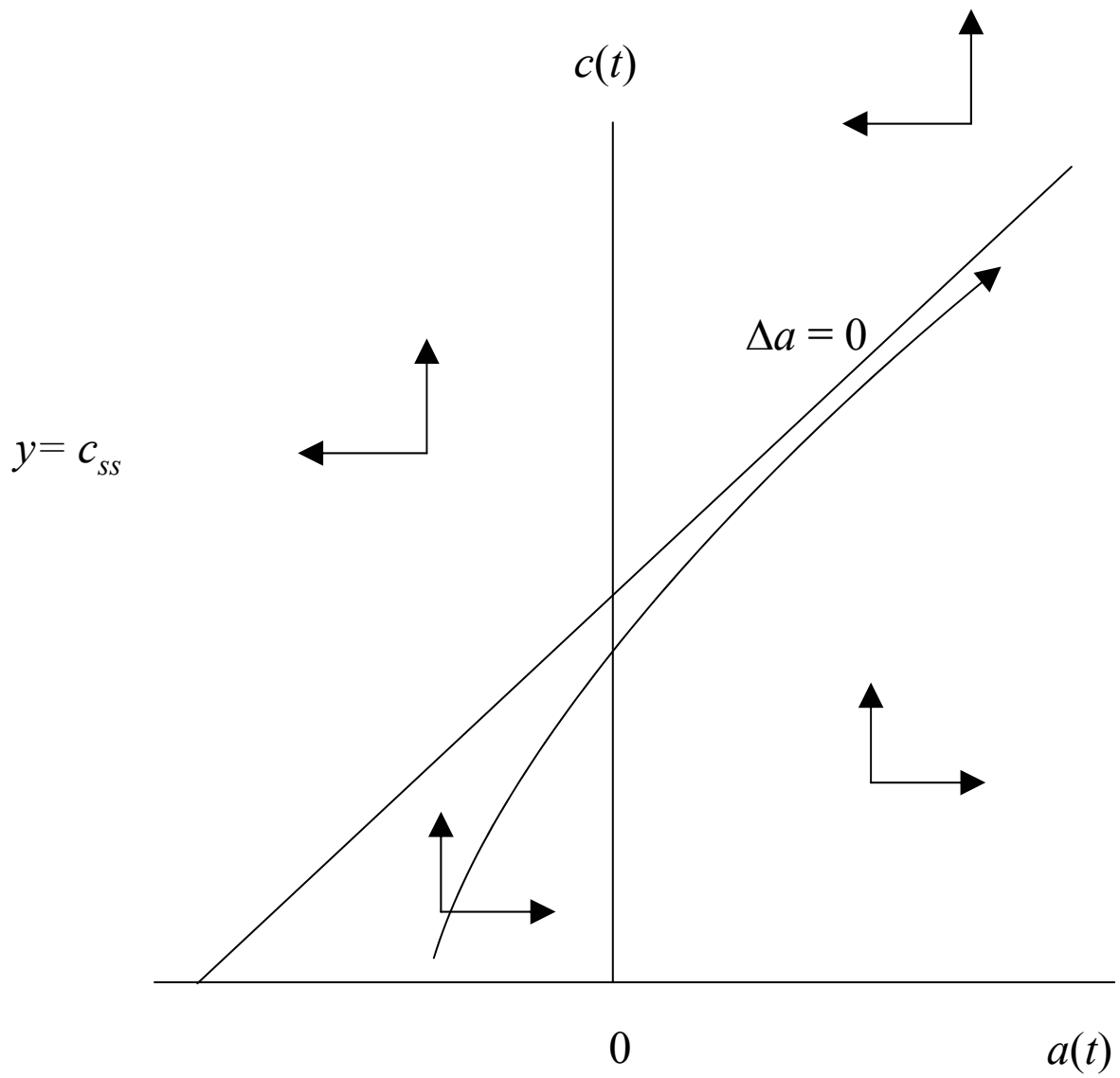


Diagrama de fases apartado f)

Caso  $\beta(1 + r) < 1$

