

**Hoja de ejercicios 8**  
A resolver el 5 de mayo de 2006

**Ejercicio 1. Externalidades y los teoremas del bienestar**

Considere una economía como la descrita en el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans. La población y el nivel tecnológico son constantes e iguales a  $L(t) = 1$  y  $A(t) = 1$  para todo  $t$ . El individuo representativo tiene disponible una unidad de tiempo que dedica a trabajar. Toma decisiones sobre cuanto consumir,  $c(t)$ , y su nivel de activos,  $a(t)$ , para maximizar su utilidad

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u[c(t)]$$

sujeto a su restricción presupuestaria. Los consumidores reciben un salario  $w(t)$  por su trabajo y una remuneración  $R(t)$  por unidad de activo.

En esta economía hay  $N$  empresas idénticas que producen el bien que los consumidores utilizan para consumir. Cada empresa demanda trabajo,  $n(t)$ , al salario  $w(t)$  y capital,  $k(t)$  al precio  $r(t)$  para maximizar beneficios. La tecnología se resume en la función de producción

$$y(t) = F[k(t), K(t), n(t)]$$

donde  $K(t)$  es el capital total de la economía (suma de todos los capitales que usan las  $N$  empresas). Se supone que el capital agregado afecta a la producción individual de cada empresa porque existen externalidades. Definiendo la parcial de  $F$  con respecto al capital agregado como

$$F_K \equiv \frac{\partial F}{\partial K},$$

si  $F_K > 0$ , la externalidad es positiva (por ejemplo el efecto que la inversión en I+D de una empresa tiene sobre la productividad de las demás). Por el contrario, si  $F_K < 0$ , la externalidad es negativa (por ejemplo cuando existe congestión de un recurso público). La economía empieza con un stock de capital agregado  $K(0)$ , repartido de forma igual entre todas las empresas. Defina con letras mayúsculas variables agregadas de la economía y con minúsculas las variables per cápita.

**a.** Escriba y resuelva el problema del consumidor representativo.

- b.** Escriba y resuelva el problema de una de las empresas [Nota: las empresas toman como dado el stock de capital total de la economía,  $K(t)$ ].
- c.** Defina un equilibrio competitivo en esta economía.
- d.** Utilice las condiciones del equilibrio competitivo para reducir la solución a un sistema de dos ecuaciones en diferencias en  $c(t)$  y  $K(t)$ . Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones en diferencias, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones.
- e.** Escriba y resuelva el problema del Planificador Social. Caracterice la solución del Problema del Planificador Social como un sistema de ecuaciones en diferencias en  $c(t)$  y  $K(t)$ . Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones en diferencias, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones. [Nota el planificador social puede determinar el stock agregado del capital de la economía,  $K(t)$ ].
- f.** Compare la solución al equilibrio competitivo con la solución que daría el planificador social. ¿Qué nos dice esta comparación sobre la optimalidad del equilibrio competitivo? ¿Qué nos dice sobre una posible actuación del gobierno?