

Hoja de ejercicios 8
(Soluciones)

Ejercicio 1. Externalidades y los teoremas del bienestar

Considere una economía como la descrita en el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans. La población y el nivel tecnológico son constantes e iguales a $L(t) = 1$ y $A(t) = 1$ para todo t . El individuo representativo tiene disponible una unidad de tiempo que dedica a trabajar. Toma decisiones sobre cuanto consumir, $c(t)$, y su nivel de activos, $a(t)$, para maximizar su utilidad

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u[c(t)]$$

sujeto a su restricción presupuestaria. Los consumidores reciben un salario $w(t)$ por su trabajo y una remuneración $R(t)$ por unidad de activo.

En esta economía hay N empresas idénticas que producen el bien que los consumidores utilizan para consumir. Cada empresa demanda trabajo, $n(t)$, al salario $w(t)$ y capital, $k(t)$ al precio $r(t)$ para maximizar beneficios. La tecnología se resume en la función de producción

$$y(t) = F[k(t), K(t), n(t)]$$

donde $K(t)$ es el capital total de la economía (suma de todos los capitales que usan las N empresas). Se supone que el capital agregado afecta a la producción individual de cada empresa porque existen externalidades. Definiendo la parcial de F con respecto al capital agregado como

$$F_K \equiv \frac{\partial F}{\partial K},$$

si $F_K > 0$, la externalidad es positiva (por ejemplo el efecto que la inversión en I+D de una empresa tiene sobre la productividad de las demás). Por el contrario, si $F_K < 0$, la externalidad es negativa (por ejemplo cuando existe congestión de un recurso público). La economía empieza con un stock de capital agregado $K(0)$, repartido de forma igual entre todas las empresas. Defina con letras mayúsculas variables agregadas de la economía y con minúsculas las variables per cápita.

a. Escriba y resuelva el problema del consumidor representativo.

- b.** Escriba y resuelva el problema de una de las empresas [Nota: las empresas toman como dado el stock de capital total de la economía, $K(t)$].
- c.** Defina un equilibrio competitivo en esta economía.
- d.** Utilice las condiciones del equilibrio competitivo para reducir la solución a un sistema de dos ecuaciones en diferencias en $c(t)$ y $K(t)$. Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones en diferencias, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones.
- e.** Escriba y resuelva el problema del Planificador Social. Caracterice la solución del Problema del Planificador Social como un sistema de ecuaciones en diferencias en $c(t)$ y $K(t)$. Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones en diferencias, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones. [Nota el planificador social puede determinar el stock agregado del capital de la economía, $K(t)$].
- f.** Compare la solución al equilibrio competitivo con la solución que daría el planificador social. ¿Qué nos dice esta comparación sobre la optimalidad del equilibrio competitivo? ¿Qué nos dice sobre una posible actuación del gobierno?

Soluciones

- a.** El problema que ha de resolver el agente es elegir la secuencia $\{c(t), a(t)\}_{t=0}^{\infty}$ para maximizar su función objetivo

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u[c(t)],$$

sujeto a la restricción

$$c(t) + a(t+1) \leq w(t) + (1 + R(t))a(t)$$

$$c(t) \geq 0,$$

$$a(0) = a_0 \text{ dado.}$$

Para resolver el problema escribimos el Lagrangiano como

$$L[\{c(t), a(t), \lambda(t)\}_{t=0}^{\infty}] = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{u[c(t)] - \lambda(t)[c(t) + a(t+1) - w(t) - (1 + R(t))a(t)]\}.$$

Las condiciones necesarias (y suficientes en este caso) son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\cdot)}{\partial c(t)} &= \beta^t [u' [c(t)] - \lambda(t)] = 0 \\ \frac{\partial L(\cdot)}{\partial a(t+1)} &= -\beta^t \lambda(t) + \beta^{t+1} \lambda(t+1)[1 + R(t+1)] = 0 \\ \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \lambda(t)} &= \beta^t [w(t) + (1 + R(t))a(t) - c(t) - a(t+1)] = 0.\end{aligned}$$

Estas ecuaciones se pueden resumir en

$$\begin{aligned}u' [c(t)] &= \lambda(t) \\ \lambda(t) &= \beta \lambda(t+1)[1 + R(t+1)], \\ w(t) + (1 + R(t))a(t) &= c(t) + a(t+1).\end{aligned}$$

Sustituyendo λ en la segunda ecuación, aparece el sistema en diferencias en c y a . En el caso que $a(t) > 0$,

$$u' [c(t)] = \beta u' [c(t+1)] [1 + R(t+1)] \quad (\text{A1})$$

$$w(t) + (1 + R(t))a(t) = c(t) + a(t+1). \quad (\text{A2})$$

Las condiciones de contorno son la condición inicial

$$a(0) = a_0 \text{ dado}, \quad (\text{A3})$$

y la condición de transversalidad

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \lambda(t) a(t) = 0. \quad (\text{A4})$$

b. El problema de una de las empresas es:

$$\max_{k(t), n(t)} F[k(t), K(t), n(t)] - r(t)k(t) - w(t)n(t),$$

Las condiciones de primer orden de este problema son:

$$F_k[k(t), K(t), n(t)] = r(t) \quad (\text{B1})$$

$$F_n[k(t), K(t), n(t)] = w(t) \quad (\text{B2})$$

Estas ecuaciones definen $k(t)$ y $n(t)$ en forma implícita.

c. Un equilibrio competitivo es una asignación $\{a(t), c(t), k(t)\}_{t=0}^{\infty}$ y precios $\{w(t), r(t), R(t)\}_{t=0}^{\infty}$ tales que:

1. $\{a(t), c(t)\}_{t=0}^{\infty}$ resuelven el problema del consumidor dados los precios $\{w(t), R(t)\}_{t=0}^{\infty}$. Es decir, $\{a(t), c(t)\}_{t=0}^{\infty}$ son una solución del sistema de ecuaciones diferenciales formado por (A1), (A2), (A3) y (A4).
2. Las empresas maximizan beneficios. Es decir, las ecuaciones (B1) y (B2) se satisfacen.
3. No hay arbitraje entre las distintas formas de inversión:

$$R(t) = r(t) - \delta \quad (\text{C1})$$

4. Los mercados se vacían:

$$c(t) + K(t+1) - (1 - \delta)K(t) = NF[k(t), K(t), n(t)], \quad (\text{C2})$$

$$a(t) = K(t), \quad (\text{C3})$$

$$k(t) = K(t)/N \quad (\text{C4})$$

La condición (C4) es una condición de consistencia en las decisiones.

d. De (C4) tenemos que $k(t) = K(t)/N$. Puesto que todas las empresas son idénticas $n(t) = 1/N$. Sustituyendo (C1) y (B1) en (A1) obtenemos

$$\frac{u'[c(t)]}{\beta u'[c(t+1)]} = 1 + F_k \left[\frac{K(t+1)}{N}, K(t+1), \frac{1}{N} \right] - \delta. \quad (\text{D1})$$

Por otro lado, de (C2)

$$c(t) + K(t+1) - (1 - \delta)K(t) = NF \left[\frac{K(t+1)}{N}, K(t+1), \frac{1}{N} \right]. \quad (\text{D2})$$

Estas dos ecuaciones junto a las condiciones de contorno

$$K(0) = K_0 \text{ dado}, \quad (\text{D3})$$

y la condición de transversalidad

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t u'[c(t)] K(t) = 0. \quad (\text{D4})$$

e. Observamos que el planificador social puede determinar el stock agregado del capital de la economía, $K(t)$. Además, como las empresas son idénticas $k(t) = K(t)/N$ y la producción agregada será

$$Y(t) = Ny(t) = NF \left[\frac{K(t)}{N}, K(t), \frac{1}{N} \right]$$

El problema que ha de resolver el planificador es elegir la secuencia $\{c(t), K(t)\}_{t=0}^{\infty}$ para maximizar su función objetivo

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u[c(t)],$$

sujeto a la restricción

$$\begin{aligned} c(t) + K(t+1) - (1-\delta)K(t) &= NF \left[\frac{K(t+1)}{N}, K(t+1), \frac{1}{N} \right] \\ c(t) &\geq 0, \\ K(0) &= K_0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

Para resolver el problema escribimos el Lagrangiano como

$$\begin{aligned} L[\{c(t), a(t), \lambda(t)\}_{t=0}^{\infty}] &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ u[c(t)] - \lambda(t) [c(t) + K(t+1) - \right. \\ &\quad \left. - (1-\delta)K(t) - NF \left(\frac{K(t+1)}{N}, K(t+1), \frac{1}{N} \right)] \right\}. \end{aligned}$$

Las condiciones necesarias (y suficientes en este caso) son:

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial c(t)} = \beta^t [u'[c(t)] - \lambda(t)] = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\cdot)}{\partial K(t+1)} &= -\beta^t \lambda(t) + \beta^{t+1} \lambda(t+1) \left\{ 1 - \delta + F_k \left(\frac{K(t+1)}{N}, K(t+1), \frac{1}{N} \right) \right. \\ &\quad \left. + NF_K \left(\frac{K(t+1)}{N}, K(t+1), \frac{1}{N} \right) \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \lambda(t)} = \beta^t \left[c(t) + K(t+1) - (1-\delta)K(t) - NF \left(\frac{K(t+1)}{N}, K(t+1), \frac{1}{N} \right) \right] = 0.$$

Estas ecuaciones se pueden resumir en

$$\begin{aligned} u'[c(t)] &= \beta u'[c(t+1)] \left\{ 1 - \delta + F_k \left(\frac{K(t+1)}{N}, K(t+1), \frac{1}{N} \right) \right. \\ &\quad \left. + NF_K \left(\frac{K(t+1)}{N}, K(t+1), \frac{1}{N} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{E1})$$

$$c(t) + K(t+1) - (1-\delta)K(t) = NF \left(\frac{K(t+1)}{N}, K(t+1), \frac{1}{N} \right). \quad (\text{E2})$$

Las condiciones de contorno son la condición inicial

$$K(0) = K_0 \text{ dado,} \quad (\text{E3})$$

y la condición de transversalidad

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t u' [c(t)] K(t) = 0. \quad (\text{E4})$$

f. De la ecuación (D1) y (E1) se concluye que que el equilibrio competitivo es diferente al del Planificador Social siempre que la externalidad sea diferente de cero, $F_K \neq 0$. Puesto que el Planificador social toma en cuenta la externalidad a la hora de tomar sus decisiones, el equilibrio que éste obtiene es más eficiente que el competitivo. Esto abre las puertas a una posible actuación del gobierno.

En el estado estacionario $\Delta c(t) = 0$. De la ecuación (D1) tenemos que en el equilibrio competitivo

$$\Delta c(t) = 0 \implies 1 + F_k \left[\frac{K(t+1)}{N}, K(t+1), \frac{1}{N} \right] - \delta = \frac{1}{\beta}$$

Esta ecuación define implícitamente el capital agregado en el estado estacionario. En el gráfico al final del documento este capital se denota por K_{ROM} . La ecuación (E1) define implícitamente el capital agregado en el estado estacionario que elegiría el Planificador Social. En este caso tenemos que:

$$\Delta c(t) = 0 \implies 1 + F_k \left(\frac{K(t+1)}{N}, K(t+1), \frac{1}{N} \right) + N F_K \left(\frac{K(t+1)}{N}, K(t+1), \frac{1}{N} \right) - \delta = \frac{1}{\beta} \quad (\text{F1})$$

Si la externalidad es negativa, $F_K < 0$, entonces

$$1 + F_k \left(\frac{K(t+1)}{N}, K(t+1), \frac{1}{N} \right) - \delta > \frac{1}{\beta}$$

y la solución de la ecuación (F1), la cual denotamos por K_n , es menor que K_{ROM} . Es decir, en el equilibrio competitivo se produce más capital del necesario. En este caso el gobierno puede desincentivar la acumulación de capital mediante la inclusión impuestos. Si la externalidad es positiva, $F_K > 0$, entonces

$$1 + F_k \left(\frac{K(t+1)}{N}, K(t+1), \frac{1}{N} \right) - \delta < \frac{1}{\beta}$$

el capital que elegiría el Planificador Social, K_p , es mayor que K_{ROM} . Por tanto, en el equilibrio competitivo se produce menos capital del necesario. En este caso el gobierno puede incentivar la acumulación de capital a través de subsidios.

Gráfico apartado f)

