Macroeconomia Avanzada II
Curso 2005-2006

Hoja de ejercicios 9
A resolver el 12 de mayo de 2006

Ejercicio 1. Cambios del gasto público en el modelo de Ramsey

Considere el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans de horizonte infinito y tiempo discreto. La tasa de crecimiento de la población es $n > 0$. Cada agente tiene una tasa de descuento intertemporal de $\rho > 0$. La función de producción intensiva (per cápita) es $f(k)$, donde k representa el capital per cápita. El capital se deprecia a una tasa $\delta > 0$. El gobierno gasta una cantidad $d(t)$ *per cápita* y obliga a los agentes a pagar impuestos $x(t)$ *per cápita*. En esta economía

$$d(t) = x(t) = d_a,$$

por lo que no hay deuda pública. No hay crecimiento exógeno de la productividad. El Planificador Social de esta economía tiene unas preferencias iguales a

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ u(c(t)) + v(d(t)) \right\}.$$

a. Escriba el problema de decisión del Planificador Social.

b. Caracterice la solución del Problema del Planificador Social como un sistema de ecuaciones en diferencias en k y c. Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones en diferencias, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones.

c. ¿Cómo se relaciona la asignación que resuelve el Problema del Planificador Social con la asignación del equilibrio competitivo? ¿Depende la respuesta a la pregunta anterior de cómo se financia el gasto público?

Ahora vamos a analizar el efecto que tiene un cambio en la política fiscal del gobierno. Suponga que esta economía desde el momento 0 (puede pensar en el momento 0 como el principio del año 2000) se encuentra en el estado estacionario asociado a d_a y que los impuestos son de *suma fija*. Pueden ocurrir varias cosas dependiendo de si se anticipa que el cambio va a ocurrir (esperado) o no se anticipa (no esperado) junto con el hecho de que el cambio dure para siempre (permanente) o termine en el futuro (transitorio). Las preguntas siguientes analizan las posibles diferencias.

d. Imagine que en un momento dado, al que llamaremos momento $t_2 > 0$ (puede pensar en el principio del año 2002), tanto el gasto como los impuestos disminuyen de forma inesperada a $d_b < d_a$ y se espera que permanezca en el nuevo nivel de forma permanentemente. Analice la evolución del capital per cápita, el consumo per cápita, el tipo de interés y los salarios desde el momento 0 hasta ∞.

e. Suponga ahora que en un momento $t_1 < t_2$ (puede pensar en t_1 como el principio del año 2001) aparece la noticia de que en el momento t_2 (principio del año 2002) tanto el gasto como los impuestos disminuirán a $d_b < d_a$ y se espera que permanezcan en el nuevo nivel de forma permanente. Analice la evolución del capital per cápita, el consumo per cápita, el tipo de interés y los salarios desde el momento 0 hasta ∞. ¿Es diferente a la del apartado (d)?

f. Suponga que el cambio es inesperado, como en el apartado (d), pero en el momento del cambio se sabe que en un momento futuro, al que llamaremos $t_3 > t_2$ (puede pensar en t_3 como el principio del año 2003) el pasto público y los impuestos van a volver a sus niveles habituales. Analice la evolución del capital per cápita, el consumo per cápita, el tipo de interés y los salarios desde el momento 0 hasta ∞. ¿Es diferente a la del apartado (d)?

g. Finalmente, suponga ahora que en un momento $t_1 < t_2 < t_3$ aparece la noticia de que en el momento t_2 el pasto público y los impuestos van a disminuir de d_a a d_b y que en el momento t_3 volverá a sus niveles actuales iguales a d_a. Analice la evolución del capital per cápita y el consumo per cápita desde el momento 0 hasta ∞. Compare con las respuestas en los apartados (d), (e) y (f).

Solución

a. El Planificador Social resuelve el siguiente problema de decisión: dado $\{d(t)\}$ elegir $\{c(t),\, k(t)\}$ para maximizar

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{u(c(t)) + v(d(t))\right\}$$

sujeto a las restricciones

$$c(t) + (1+n)k(t+1) - (1-\delta)k(t) + d(t) = f\left[k(t)\right]$$
$$k(0) = k_0;\ c\left(t\right), k\left(t\right) \geq 0$$

b. Para resolver el problema escribimos el Lagrangiano como

$$L\left[\{c(t), a(t), \lambda(t)\}_{t=0}^{\infty}\right] = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{u(c(t)) + v(d(t)) - \right.$$
$$\left. -\lambda(t)\left[c(t) + (1+n)k(t+1) - (1-\delta)k(t) + d(t) - f\left[k(t)\right]\right]\right\}.$$

Las condiciones necesarias (y suficientes en este caso) son:

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial c(t)} = \beta^t \left[u'\left[c(t)\right] - \lambda(t)\right] = 0$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial k(t+1)} = -\beta^t(1+n)\lambda(t) + \beta^{t+1}\lambda(t+1)\left[1-\delta+f'\left(k(t+1)\right)\right] = 0$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \lambda(t)} = \beta^t\left[c(t) + (1+n)k(t+1) - (1-\delta)k(t) + d(t) - f\left[k(t)\right]\right] = 0.$$

Estas ecuaciones se pueden resumir en

$$u'\left[c(t)\right] = \beta u'\left[c(t+1)\right]\left[1-\delta+f'\left(k(t+1)\right) - n\right] \tag{B1}$$

$$c(t) + (1+n)k(t+1) - (1-\delta)k(t) + d(t) = f\left[k(t)\right]. \tag{E2}$$

Las condiciones de contorno son la condición inicial

$$k(0) = k_0 \text{ dado}, \tag{E3}$$

y la condición de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t u'\left[c(t)\right]k(t) = 0. \tag{E4}$$

c. La asignación del Problema del Planificador coincide con la del equilibrio competitivo si el gasto público se financia con impuestos de suma fija . Este resultado es una consecuencia del Primer Teorema del Bienestar que asegura que en una economía sin externalidades ni impuestos distorsionadores y con mercados competitivos, la asignación del equilibrio competitivo es Pareto Óptima (es decir, resuelve el problema del Planificador Social). Por el contrario, si el gasto público se financiara con impuestos sobre la renta, la asignación del equilibrio competitivo no sería un óptimo de Pareto y no coincidiría con la asignación escogida por un Planificador Social.

d. La economía se encuentra inicialmente en un estado estacionario representado por el punto E_0. Una disiminución permanente del gasto público implica un desplazamiento hacia arriba (norte) de la curva $\dot{k} = 0$ en el diagrama de fase. La curva $\dot{c} = 0$ no se desplaza. El nuevo equilibrio estacionario se encuentra en el punto de corte de la nueva curva $\dot{k} = 0$ con la curva $\dot{c} = 0$ (representado en el gráfico por el punto E_1). Por lo tanto el capital del equilibrio estacionario no cambia. El producto tampoco cambia, al no cambiar el capital ($y = f(k)$). Por el contrario el consumo aumenta por una cantidad igual al valor absoluto de la disminución del gasto público dado que en equilibrio $c = y-(\delta+n)k-d$ (como el producto y el capital permanecen constantes, obtenemos que $\triangle c = -\triangle d$). En cuanto a la respuesta de la economía en el corto plazo, observar que la economía converge al nuevo estado estacionario de forma inmediata. Esto ocurre porque el valor del consumo en la *nueva* trayectoria de silla evaluada en el capital inicial, coincide con el consumo del estado estacionario. Esto, significa que el consumo se ajusta de forma inmediata con un aumento igual a la disminución del gasto. El capital permanece constante a lo largo del tiempo y el consumo permenecerá constante en el nivel (c_1). La tasa de interés no cambia puesto que el capital por trabajador no cambia ($r = f'(k)$). Por la misma razón, el salario real no cambia ($w = f(k) - f'(k)k$). El diagrama de fases y la evolución de las variables a lo largo del tiempo se muestran en las figura 2.

e. El diagrama de fase se muestra en la figura 3. En el momento t_2 el deplasamiento de $\dot{k} = 0$ será permanente. Notemos que el consumo no puede saltar en el momento t_2 hasta alcanzar la trayectoría de silla porque esto violaría las condiciones del Principio del Máximo (la condición $H_c = 0 \Longrightarrow e^{-(\rho-n)t}u'(c(t)) = \lambda(t)$, y la continuidad de $\lambda(t)$ y de $u'(c(t))$ implican que el consumo es una función continua del tiempo). Puesto que el cambio es esperado, en el momento t_2 la economía debe encontrarse en un punto de trayectoria de silla del nuevo equilibrio. Por tanto, en el momento t_1 el consumo salta hasta $c_1 < c_B$, lo que implica que el capital comience a disminuir (ya que la economía todabía se encuentra en el equilibrio E_0). Cuando el capital es menor que K_{ROM} el consumo aumenta por lo cual nos movemos en direección noroeste en el diagrama de face. La economía sigue a lo largo de esta trayectoria hasta que llega a la trayectoria de silla del equilibrio E_1 en el momento t_2. Luego la economía se mueve en dirección noreste a lo largo de la trayectoria de silla hacia el punto E_1. La evolución de las variables a lo largo del tiempo se muestran en las figura 4.

f. El diagrama de fase se muestra en la figura 5. En este caso el desplazamiento de la curva $\dot{k} = 0$ es sólo temporal. Por lo tanto, el consumo no aumenta hasta el nivel c_1 (del apartado anterior) puesto que esto implicaría que el consumo pegaría un salto cuando la curva $\dot{k} = 0$ vuelva a desplazarse hacia su posición original, lo que violaría las condiciones del Principio del Máximo. En el momento 0, el consumo óptimo es igual a c_2. Como en el momento 0 el consumo se encuentra por debajo de la curva $\dot{k} = 0$, el capital aumenta y se hace mayor a k_{ROM}. Cuando el capital es mayor a k_{ROM} el consumo disminuye (ver condición de Euler) por lo cual nos movemos en dirección sureste en el diagrama de fase. La economía sigue a lo largo de la trayectoria sureste hasta que llega a la trayectoria de silla justo en el momento en que la curva $\dot{k} = 0$ se vuelve a desplazar a su posición original. De esta forma, el consumo óptimo ya está ubicado en la trayectoria de silla y no es necesario que el consumo salte para ubicarse en la trayectoria de silla. Luego, la economía se mueve en dirección suroeste a lo largo de la trayectoria de silla hacia el punto E_0 en el diagrama de fase. La evolución de las variables a lo largo del tiempo se muestran en las figura 6.

g. El diagrama de fase se muestra en la figura 7. Este apartado es un hibrido del apartado (e) y del (f). Para garantizar la continuidad de $c(t)$ a partir del momento t_1 el consumo debe saltar en el momento t_1 hasta $c_1 < c_B$. Desde allí la economía sigue una trayectoria en dirección noroeste hasta llegar a c_2 en el momento t_2 . A partir de este momento, el capital comienza a aumentar nuevamente y la economía debe seguir una trayectoria que la lleve a la trayectoria de silla del equilibrio E_0 y la intersecte justo en el momento t_3. Luego la economía se mueve en dirección suroeste a lo largo de la trayectoria de silla hacia el punto E_0. La evolución de las variables a lo largo del tiempo se muestran en las figura 8.

Figura 1

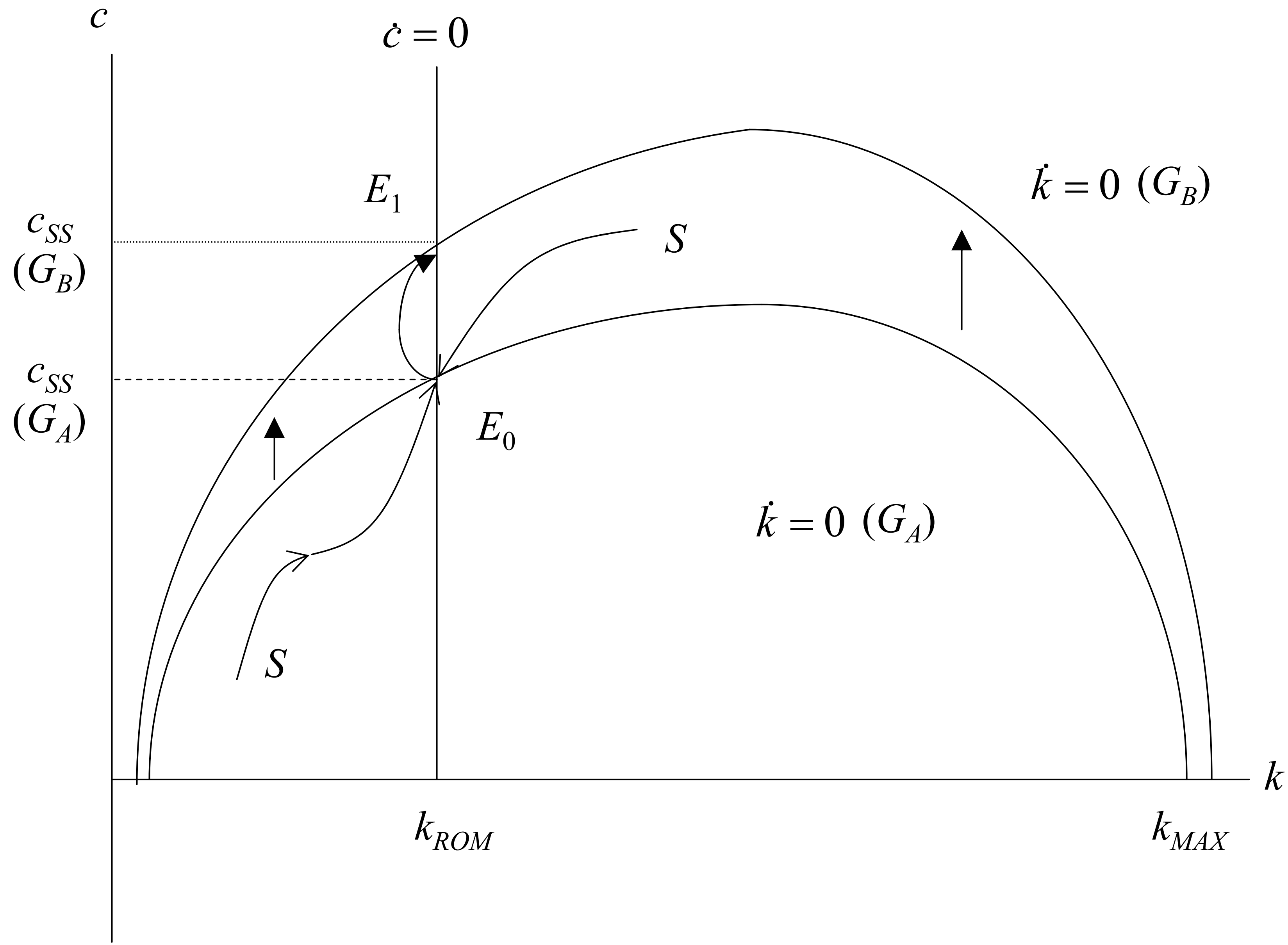


Figure 2

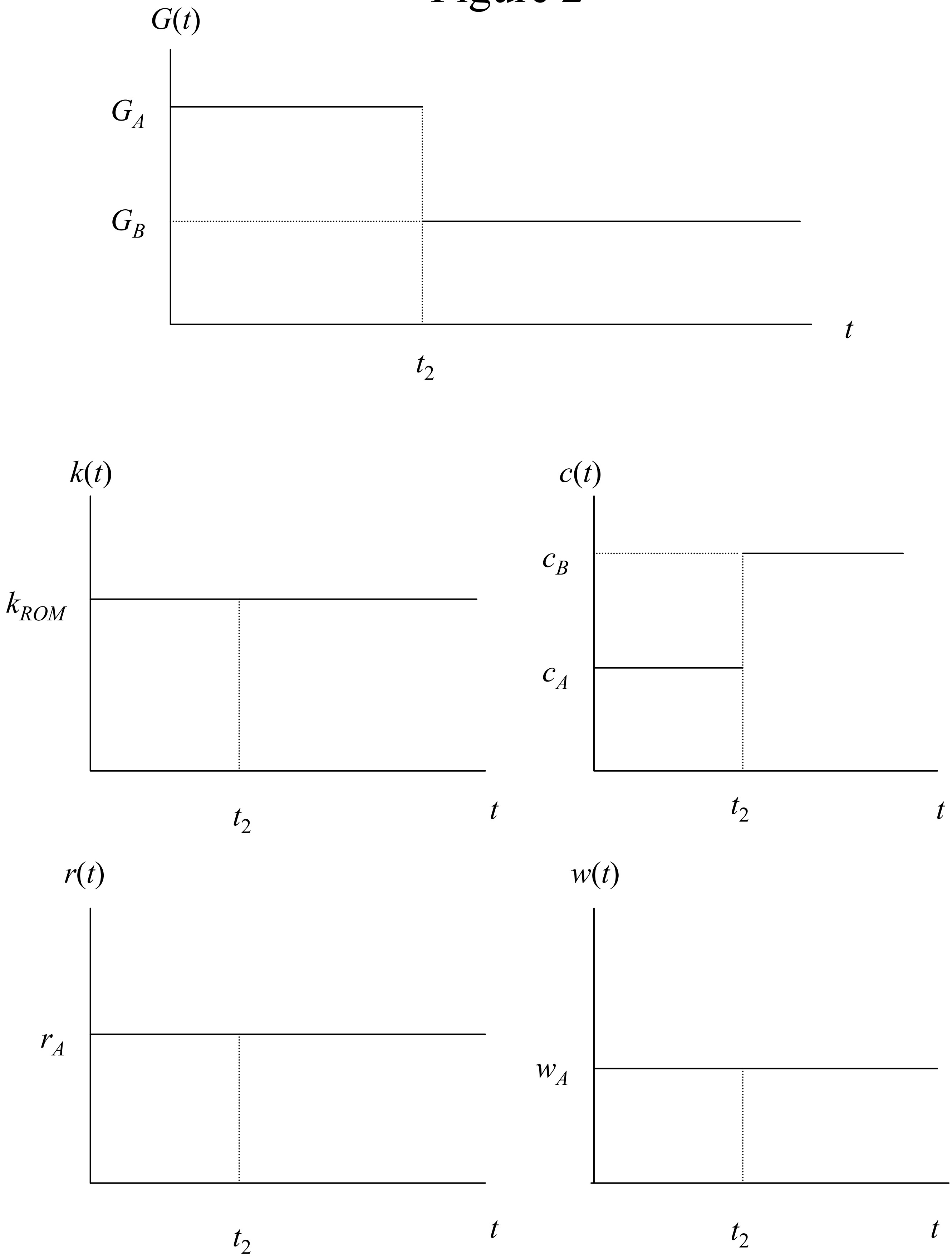


Figure 3

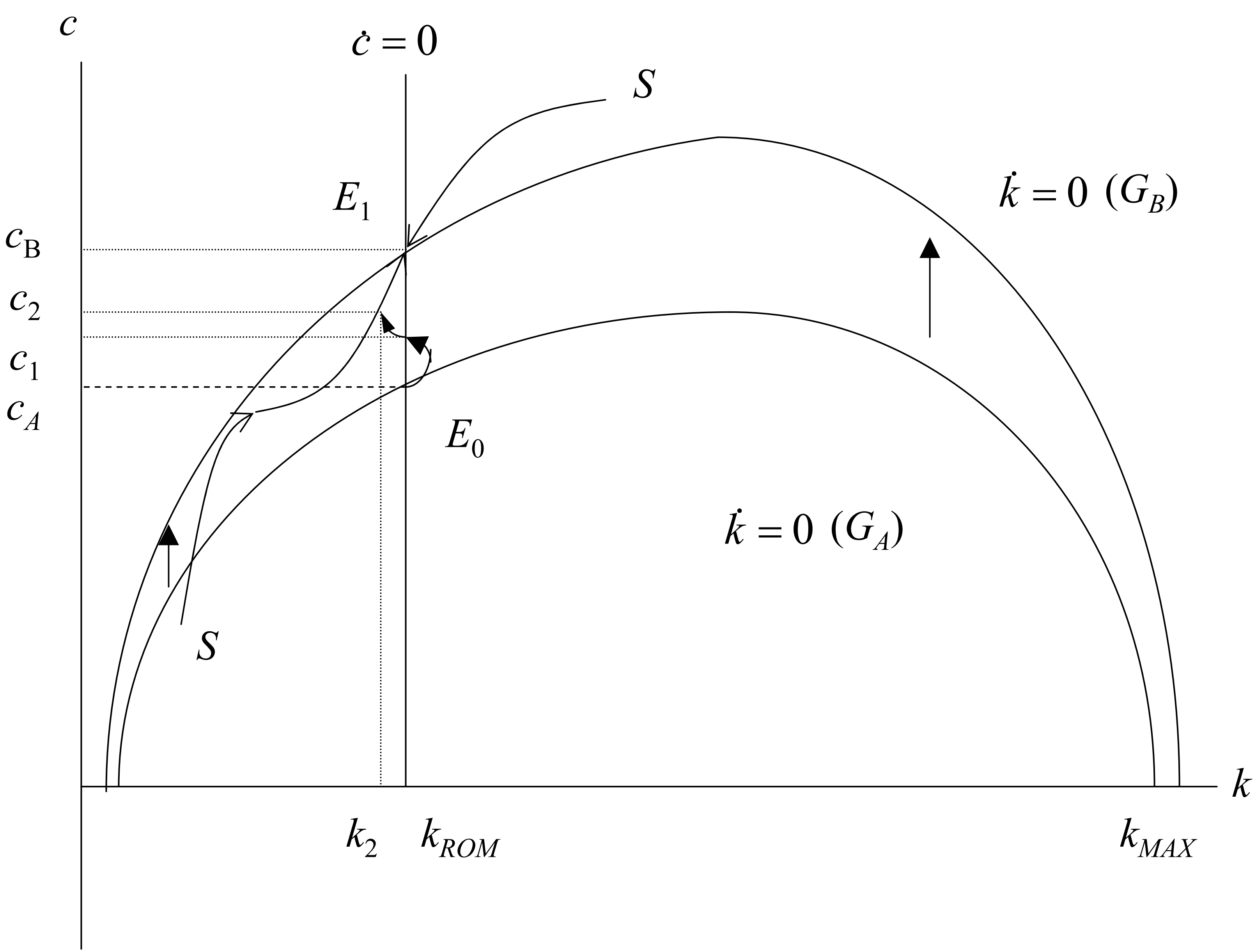
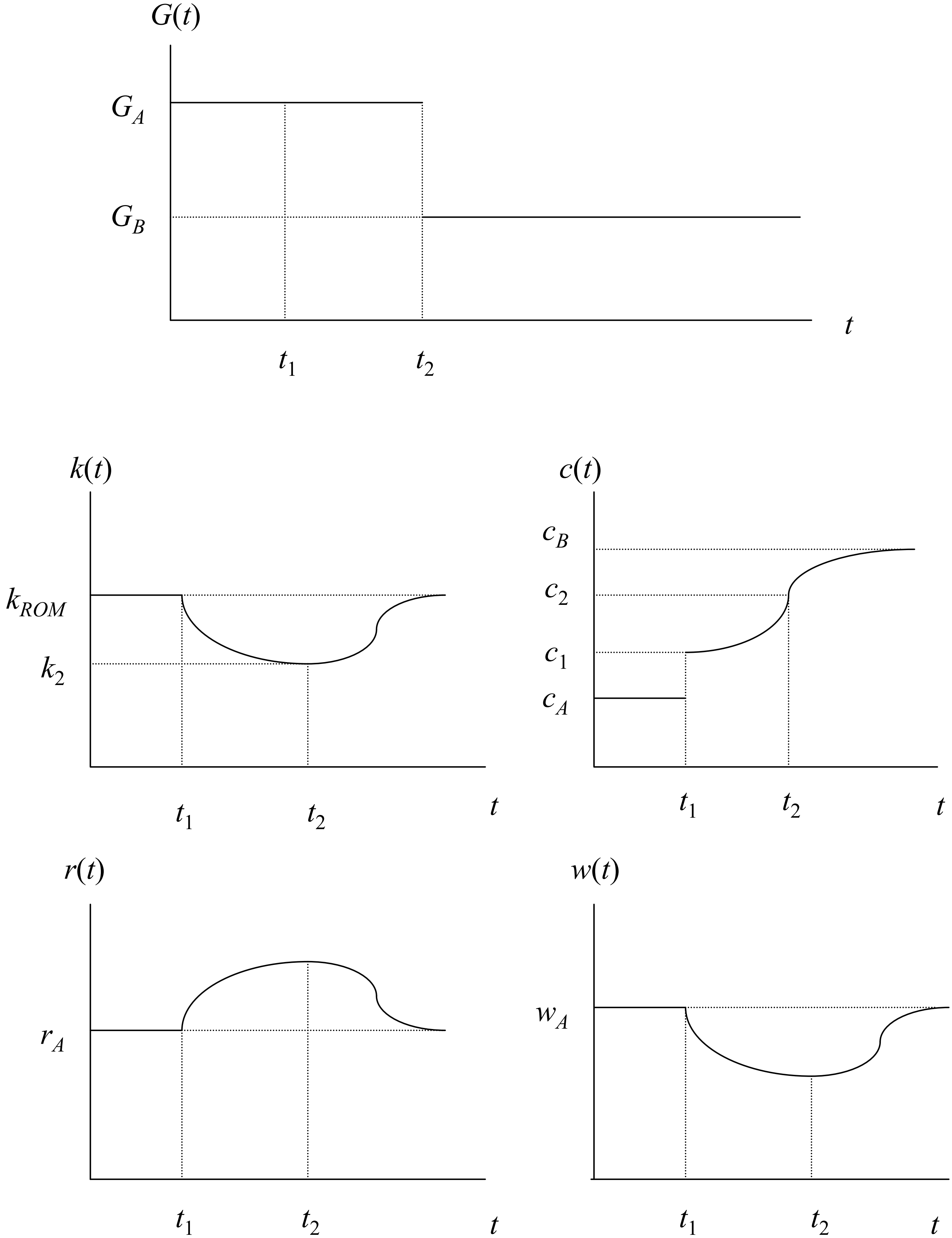
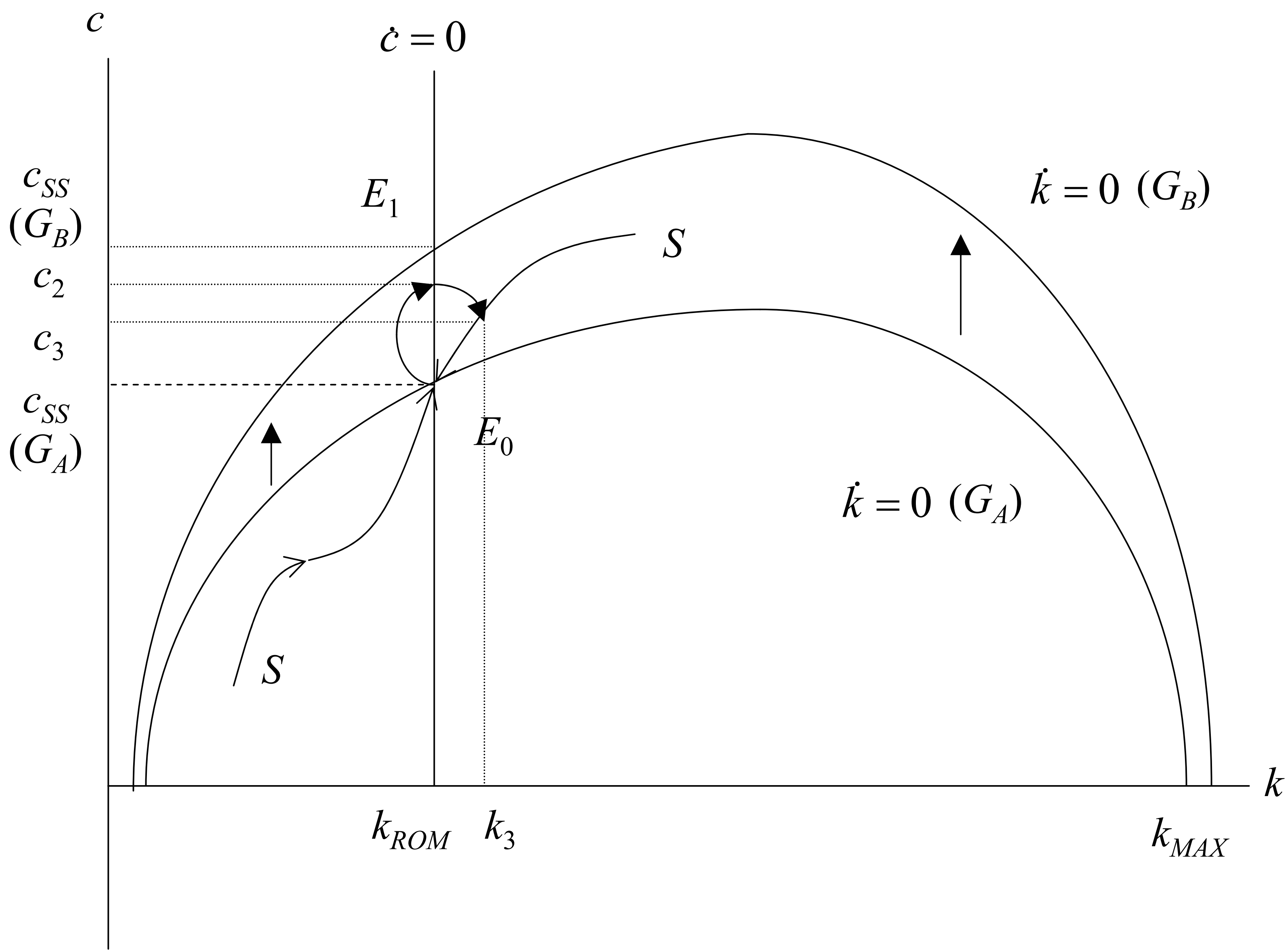


Figure 4



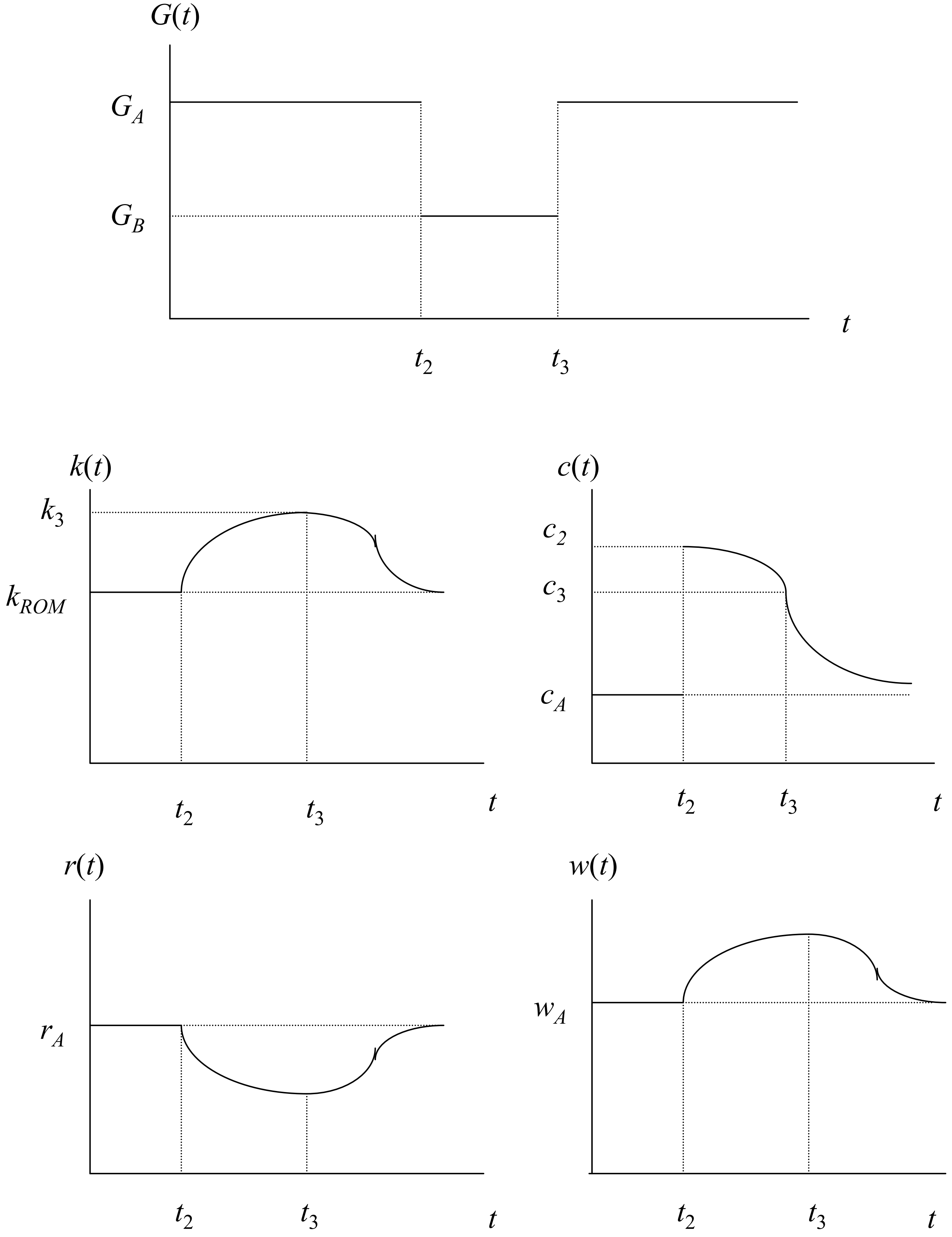
G(t)
G_A
G_B
t
t_1
t_2
k(t)
k_ROM
k_2
t_1
t_2
t
c(t)
c_B
c_2
c_1
c_A
t_1
t_2
t
r(t)
r_A
t_1
t_2
t
w(t)
w_A
t_1
t_2
t

Figure 5



c
$\dot{c} = 0$
c_{SS}
(G_B)
E_1
S
$\dot{k} = 0 \ (G_B)$
c_2
c_3
c_{SS}
(G_A)
E_0
$\dot{k} = 0 \ (G_A)$
S
k
k_{ROM}
k_3
k_{MAX}

Figure 6



$G(t)$
G_A
G_B
t
t_2
t_3
$k(t)$
k_3
k_{ROM}
t_2
t_3
t
$c(t)$
c_2
c_3
c_A
t_2
t_3
t
$r(t)$
r_A
t_2
t_3
t
$w(t)$
w_A
t_2
t_3
t

Figure 7

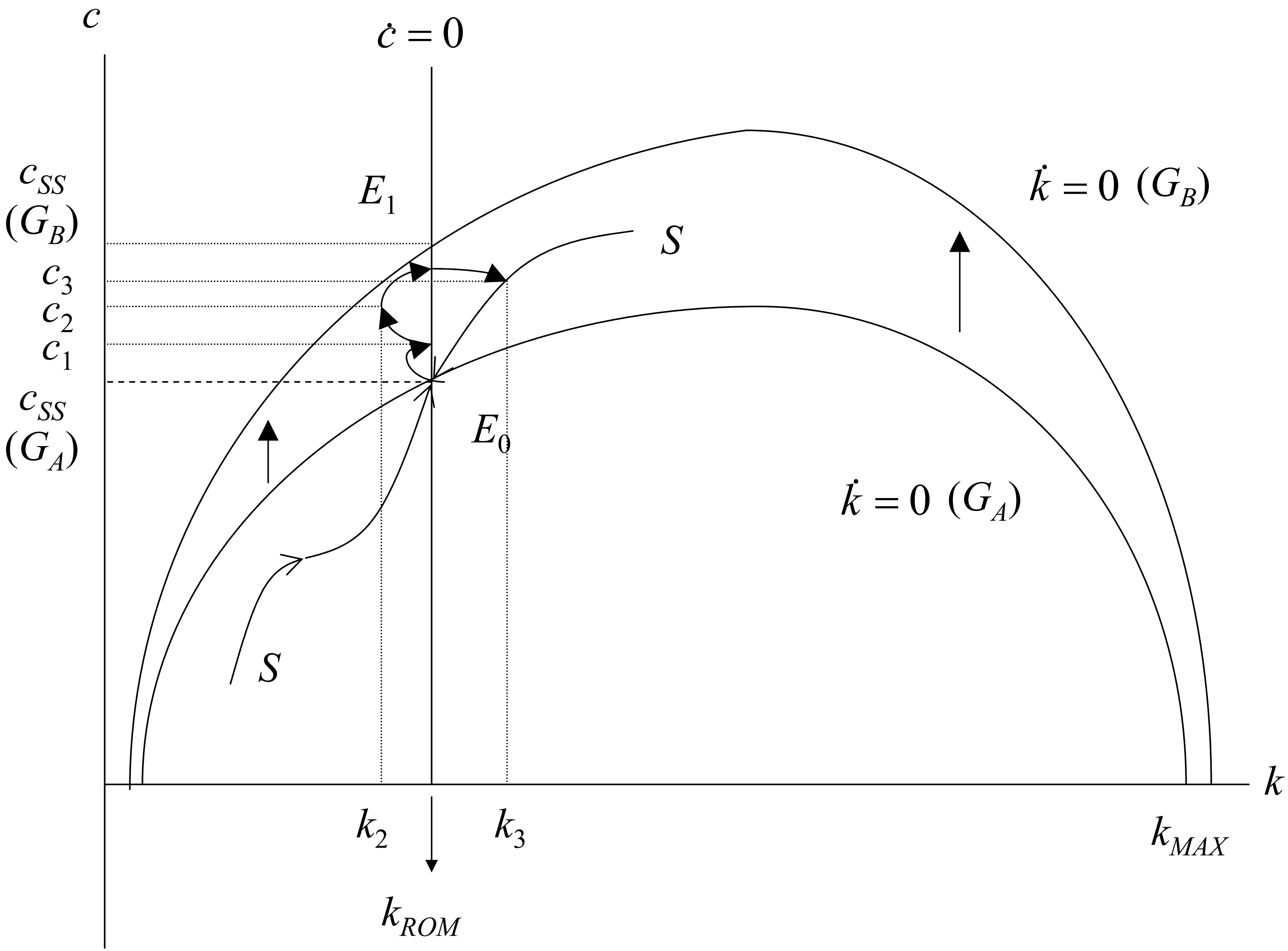
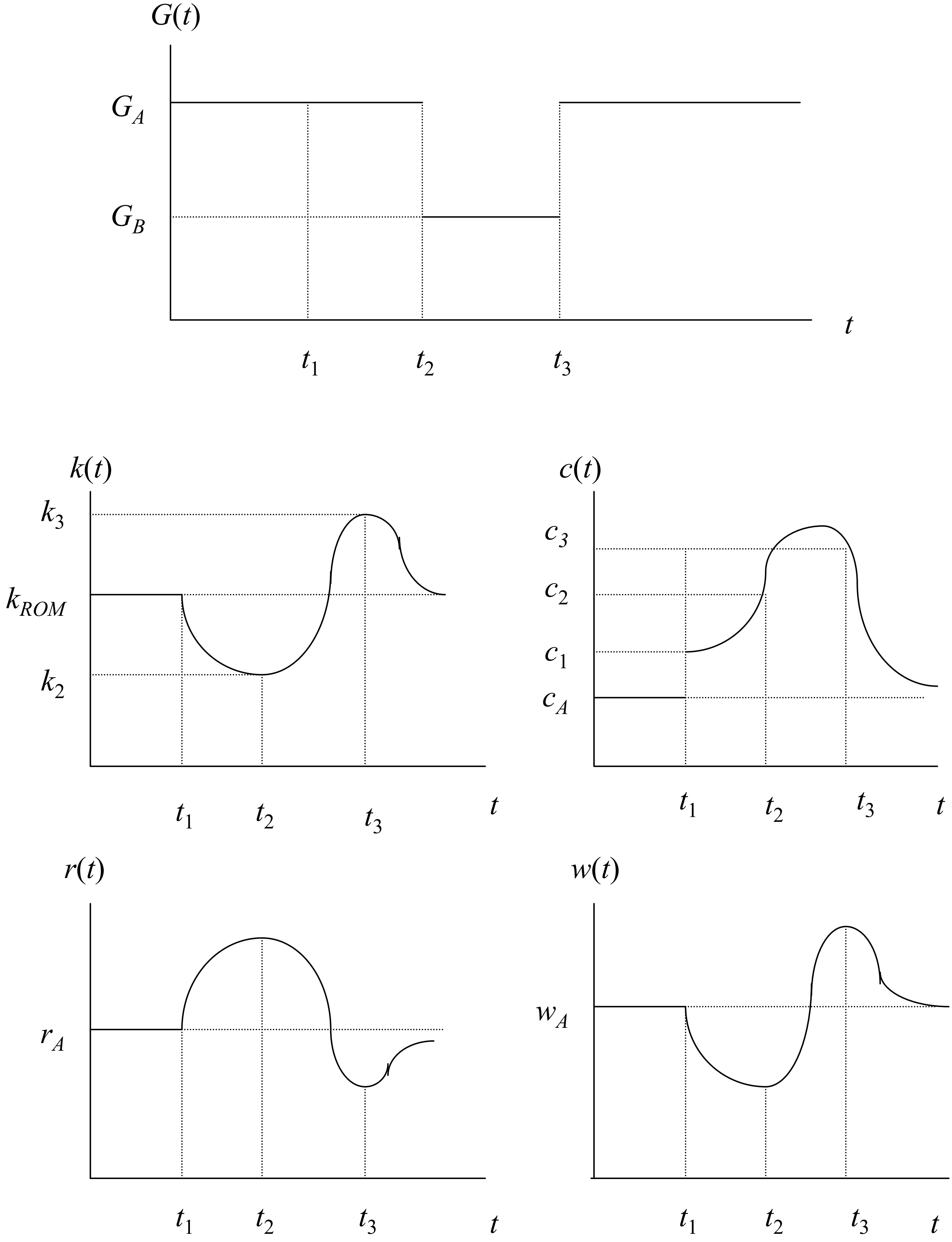


Figure 8



$G(t)$
G_A
G_B
t
t_1
t_2
t_3
$k(t)$
k_3
k_{ROM}
k_2
t_1
t_2
t_3
t
$c(t)$
c_3
c_2
c_1
c_A
t_1
t_2
t_3
t
$r(t)$
r_A
t_1
t_2
t_3
t
$w(t)$
w_A
t_1
t_2
t_3
t