

Hoja de ejercicios 10
(Soluciones)

Ejercicio 1. Transferencias en el modelo de Ramsey

Considere el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans con sector público. Cada familia tiene una tasa de descuento intertemporal de $0 < \beta < 1$ y toma decisiones para maximizar su función de utilidad

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u[c(t)].$$

La función de producción intensiva (per cápita) es $f(k)$, donde k representa el capital per cápita. El capital se deprecia a una tasa $\delta > 0$. No hay crecimiento tecnológico.

En esta economía viven $L(t)$ individuos en el momento t . Se supone que la población crece a la tasa $n > 0$. La política fiscal del gobierno consiste en recaudar impuestos para repartir transferencias. Sea $x_i(t)$ la cantidad de impuestos que el individuo i paga en el período t , donde el índice i va desde 0 a $L(t)$. El gobierno recauda, por tanto, una cantidad de impuestos en la economía igual a

$$\sum_{i=0}^{L(t)} x_i(t).$$

Esta recaudación se divide entre el número de habitantes y repartida por igual a todos los agentes que viven en la economía en forma de transferencias. Sea $d_i(t)$ la transferencia obtenida por lo que al individuo i en el momento t . Esta transferencia es igual a

$$d_i(t) = \frac{\sum_{i=0}^{L(t)} x_i(t)}{L(t)}.$$

Nótese que en este ejercicio, d no denota gasto público en bienes sino transferencias de renta.

Suponga que los impuestos que paga cada individuo (en particular, el individuo i) son de suma fija, por lo que no dependen de las decisiones que toma.

- a.** Escriba el problema de decisión del individuo i .
- b.** Caracterice la solución del problema de decisión del individuo i como un sistema de ecuaciones en diferencias en c (consumo) y a (activos). Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones en diferencias, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones.
- c.** Suponga que todos los individuos de esta economía son idénticos. Defina un equilibrio competitivo, incluyendo la restricción presupuestaria del gobierno.
- d.** Resuma las ecuaciones que caracterizan el equilibrio competitivo en un sistema de ecuaciones diferenciales en c (consumo) y k (capital). ¿Coincide la asignación del equilibrio competitivo con la asignación óptima?

Ahora suponga que, en vez de utilizar impuestos de suma fija, el gobierno recauda una proporción τ de la renta total de cada agente. Igual que antes, el gobierno divide la recaudación entre todos los agentes y la reparte como transferencias.

- e.** Escriba el problema de decisión del individuo i .
- f.** Caracterice la solución del problema de decisión del individuo i como un sistema de ecuaciones en diferencias en c (consumo) y z (activos). Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones en diferencias, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones.
- g.** Suponga que todos los individuos de esta economía son idénticos. Defina un equilibrio competitivo, incluyendo la restricción presupuestaria del gobierno.
- h.** Resuma las ecuaciones que caracterizan el equilibrio competitivo en un sistema de ecuaciones en diferencias en c (consumo) y k (capital). ¿Es el mismo que el del apartado (d)? Explique las diferencias, si existen.

Soluciones

- a.** El problema de decisión del individuo i es elegir la secuencia $\{c_i(t), a_i(t)\}_{t=0}^{\infty}$ para maximizar su función objetivo

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u [c_i(t)]$$

sujeto a las restricciones

$$c_i(t) + (1+n)a_i(t+1) - a_i(t) \leq w(t) - x_i(t) + d_i(t) + R(t)a_i(t)$$

$$a_i(0) \text{ dado,}$$

$$c_i(t) \geq 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a_i(t)}{t \prod_{\tau=0}^{t-1} [1 + R(\tau) - n]} \geq 0.$$

b. Para resolver el problema escribimos el Lagrangiano como

$$L[\{c_i(t), a_i(t), \lambda(t)\}_{t=0}^{\infty}] = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{u[c_i(t)] - \lambda(t) [c_i(t) + (1+n)a_i(t+1) - w(t) + x_i(t) - d_i(t)] -$$

Las condiciones necesarias (y suficientes en este caso) son:

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial c(t)} = \beta^t [u'[c_i(t)] - \lambda(t)] = 0$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial a(t+1)} = -\beta^t (1+n)\lambda(t) + \beta^{t+1} \lambda(t+1) [1 + R(t+1)] = 0$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \lambda(t)} = \beta^t [w(t) - x_i(t) + d_i(t) + (1+R(t))a_i(t) - c_i(t) - (1+n)a_i(t+1)] = 0.$$

Estas ecuaciones se pueden resumir en

$$u'[c_i(t)] = \lambda(t)$$

$$(1+n)\lambda(t) = \beta\lambda(t+1)[1 + R(t+1)],$$

$$w(t) - x_i(t) + d_i(t) + (1+R(t))a_i(t) = c_i(t) + a_i(t+1).$$

Sustituyendo λ en la segunda ecuación, aparece el sistema en diferencias en c y a . En el caso que $a(t) > 0$,

$$u'[c_i(t)] = \beta u'[c_i(t+1)] [1 + R(t+1) - n] \quad (\text{B1})$$

$$w(t) - x_i(t) + d_i(t) + (1+R(t))a_i(t) = c_i(t) + a_i(t+1). \quad (\text{B2})$$

Las condiciones de contorno son la condición inicial

$$a_i(0) = a_{i0} \text{ dado,} \quad (\text{B3})$$

y la condición de no-Ponzi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a_i(t)}{t \prod_{\tau=0}^{t-1} [1 + R(\tau) - n]} \geq 0. \quad (\text{B4})$$

c. Puesto que todos los individuos son idénticos, $d_i(t) = d$ y $x_i(t) = x$. Además, todos los individuos tendrán la misma función de consumo y ahorro. Es decir, $c_i(t) = c_i$ y $a_i(t) = a(t)$ para todo i . De esta forma podemos definir un equilibrio competitivo como una asignación $\{a(t), c(t), k(t)\}$, precios $\{w(t), r(t), R(t)\}$ y política fiscal $\{d_i(t), x_i(t)\}$, tales que:

1. $\{a(t), c(t)\}$ maximizan el problema del consumidor dados los precios y la política fiscal. Es decir, resuelven el sistema de ecuaciones formado por (B1) y (B2) sujeto a las condiciones de contorno (B3) y (B4).
2. Las empresas maximizan beneficios:

$$r(t) = f'(k(t)), \quad (1)$$

$$w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t)). \quad (2)$$

3. No hay arbitraje entre las distintas formas de inversión:

$$R(t) = r(t) - \delta.$$

4. El gobierno satisface su restricción presupuestaria

$$\sum_{i=0}^{N(t)} x_i(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} d_i(t).$$

5. Los mercados se vacían:

$$c(t) + (1 + n)k(t + 1) - (1 - \delta)k(t) = f(k(t)), \quad (3)$$

$$a(t) = k(t). \quad (4)$$

d. Puesto que $d_i(t) = d$ y $x_i(t) = x$, entonces de la restricción presupuestaria del gobierno obtenemos que $d = x$. Sustituyendo (C1) en la ecuación de no

arbitraje obtenemos $R(t) = f'(k(t)) - \delta$. Luego, sustituyendo $c_i(t) = c(t)$ y el valor de $R(t)$ en la ecuación de Euler (B1) obtenemos

$$\frac{u'[c(t)]}{\beta u'[c(t+1)]} = 1 + f'(k(t+1)) - \delta - n. \quad (5)$$

Esta ecuación junto con la ecuación (C3) forman un sistema de ecuaciones diferenciales en c y k que caracteriza el equilibrio competitivo. Vemos que este equilibrio coincide con la solución que daría un Planificador Social y por tanto es eficiente.

e. En este caso el problema de decisión del individuo i es elegir la secuencia $\{c_i(t), a_i(t)\}_{t=0}^{\infty}$ para maximizar su función objetivo

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u[c_i(t)]$$

sujeto a las restricciones

$$c_i(t) + (1+n)a_i(t+1) - a_i(t) = (1-\tau)[w(t) + R(t)a_i(t)] + d_i(t)$$

$$a_i(0) \text{ dado,}$$

$$c_i(t) \geq 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a_i(t)}{t \prod_{\tau=0}^{t-1} [1 + R(\tau) - n]} \geq 0.$$

f. Para resolver el problema escribimos el Lagrangiano como

$$L[\{c_i(t), a_i(t), \lambda(t)\}_{t=0}^{\infty}] = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{u[c_i(t)] - \lambda(t) [c_i(t) + (1+n)a_i(t+1) - a_i(t) - d_i(t) - (1-\tau)w(t)]\}$$

Las condiciones necesarias (y suficientes en este caso) son:

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial c(t)} = \beta^t [u'[c_i(t)] - \lambda(t)] = 0$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial a(t+1)} = -\beta^t (1+n)\lambda(t) + \beta^{t+1} \lambda(t+1) [1 + (1-\tau)R(t+1)] = 0$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \lambda(t)} = \beta^t [c_i(t) + (1+n)a_i(t+1) - a_i(t) - (1-\tau)[w(t) + R(t)a_i(t)] + d_i(t) = 0.$$

Estas ecuaciones se pueden resumir en

$$u' [c_i(t)] = \lambda(t)$$

$$(1 + n)\lambda(t) = \beta\lambda(t + 1)[1 + (1 - \tau)R(t + 1)],$$

$$c_i(t) + (1 + n)a_i(t + 1) - a_i(t) = (1 - \tau) [w(t) + R(t)a_i(t)] + d_i(t).$$

Sustituyendo λ en la segunda ecuación, aparece el sistema en diferencias en c y a . En el caso que $a(t) > 0$,

$$u' [c_i(t)] = \beta u' [c_i(t + 1)] [1 + (1 - \tau)R(t + 1) - n] \quad (\text{F1})$$

$$c_i(t) + (1 + n)a_i(t + 1) - a_i(t) = (1 - \tau) [w(t) + R(t)a_i(t)] + d_i(t). \quad (\text{F2})$$

Las condiciones de contorno son la condición inicial

$$a_i(0) = a_{i0} \text{ dado}, \quad (\text{F3})$$

y la condición de no-Ponzi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a_i(t)}{t \prod_{\tau=0} [1 + R(\tau) - n]} \geq 0. \quad (\text{F4})$$

g. El equilibrio competitivo es casi idéntico al del apartado (c). Como en el apartado (c) $d_i(t) = d$ puesto que todos los individuos son idénticos. Además, todos los individuos tendrán la misma función de consumo y ahorro. Es decir, $c_i(t) = c_i$ y $a_i(t) = a(t)$ para todo i . De esta forma podemos definir un equilibrio competitivo como una asignación $\{a(t), c(t), k(t)\}$, precios $\{w(t), r(t), R(t)\}$ y política fiscal $\{d_i(t), \tau\}$, tales que:

1. $\{a(t), c(t)\}$ maximizan el problema del consumidor dados los precios y la política fiscal. Es decir, resuelven el sistema de ecuaciones formado por (F1) y (F2) sujeto a las condiciones de contorno (F3) y (F4).
2. Las empresas maximizan beneficios:

$$r(t) = f'(k(t)), \quad (\text{G1})$$

$$w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t)). \quad (\text{G2})$$

3. No hay arbitraje entre las distintas formas de inversión:

$$R(t) = r(t) - \delta.$$

4. El gobierno satisface su restricción presupuestaria

$$\sum_{i=0}^{N(t)} \tau [R(t)a_i(t) + w(t)] = \sum_{i=0}^{N(t)} d_i.$$

5. Los mercados se vacían:

$$\begin{aligned} c(t) + (1+n)k(t+1) - (1-\delta)k(t) &= f(k(t)) & \text{(G3)} \\ a(t) &= k(t). \end{aligned}$$

h. Sustituyendo (G1) en la ecuación de no arbitraje obtenemos $R(t) = f'(k(t)) - \delta$. Luego, sustituyendo $c_i(t) = c(t)$ y el valor de $R(t)$ en la ecuación de Euler (F1) obtenemos

$$\frac{u'[c(t)]}{\beta u'[c(t+1)]} = 1 + (1-\tau)[f'(k(t+1)) - \delta] - n, \quad \text{(H1)}$$

Esta ecuación junto con la ecuación (F2) forman un sistema de ecuaciones diferenciales en c y k que caracteriza el equilibrio competitivo.

De las ecuaciones (H1) y (F2) podemos ver que si $\tau > 0$ los equilibrios competitivos son diferentes. Vemos que en el equilibrio con impuestos distorsionadores, aunque el gobierno no tiene ningún gasto y lo único que hace es distribuir en forma equitativa todo lo que recauda con los impuestos, los individuos tienen menos incentivos para ahorrar y esto se traduce a largo plazo en un capital del estado estacionario menor. Para ver esta afirmación formalmente notemos que en el estado estacionario $\Delta c(t) = 0$. Por tanto, de la ecuación (H1) obtenemos una ecuación que nos define en forma implícita el capital del estado estacionario dada por:

$$1 + (1-\tau)[f'(k_{ss}) - \delta] - n = \frac{1}{\beta}. \quad \text{(H2)}$$

Cuando $\tau = 0$, la ecuación (H2) coincide con la ecuación que define el nivel de capital en el estado estacionario del equilibrio con impuestos de suma fija. Puesto que $f'(\cdot)$ es una función decreciente, vemos que un aumento de τ disminuye k_{ss} . Por tanto, el capital en el estado estacionario de la economía con impuestos distorsionadores es menor que el de la economía con impuestos de suma fija, y esta es la diferencia principal de estos dos equilibrios.