**Macroeconomia Avanzada II**
**Septiembre 2006**
Soluciones

**Problema 1. Cambios en la política fiscal (50 puntos)**

Considere el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans de horizonte infinito y tiempo continuo. La tasa de crecimiento de la población es $n > 0$. La función de producción agregada de la economía es $F[K(t), L(t)] = K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}$, donde $K(t)$ representa el capital agregado y $L(t)$ la población. El capital se deprecia a una tasa $\delta > 0$. No hay crecimiento exógeno de la productividad. En esta economía existe un gobierno que gasta una cantidad $d(t)$ *per cápita* y obliga a los agentes a pagar impuestos de suma fija iguales a $x(t)$ *per cápita*. El Planificador Social de esta economía tiene unas preferencias que coinciden con las del agente representativo iguales a

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{u(c(t)) + v(d(t))\}$$

donde $c(t)$ es consumo per cápita y $0 < \beta < 1$ es la tasa de descuento.

**a.** (10 puntos) Escriba el problema de decisión del Planificador Social en términos per cápita.

**b.** (10 puntos) Caracterice la solución del Problema del Planificador Social como un sistema de ecuaciones en diferencias respecto al capital per cápita, $k$, y al consumo per cápita, $c$. Escriba las condiciones de contorno de dicho sistema de ecuaciones en diferencias, esto es, las condiciones que nos permiten encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones.

**c.** (10 puntos) ¿Cómo se relaciona la asignación que resuelve el Problema del Planificador Social con la asignación del equilibrio competitivo? ¿Qué valor tendrían el salario, $w(t)$, tipo de interés, $R(t)$ y precio del capital, $r(t)$ en el equilibrio competitivo? ¿Depende su respuesta a la pregunta anterior de cómo se financia el gasto público?

**d.** (10 puntos) Asuma que la economía se encuentra inicialmente en un equilibrio estacionario y que el gobierno financia el gasto con impuestos de suma fija (es decir, $d(t) = x(t)$ para todo $t$, por lo que nunca hay deuda pública). Discuta los efectos a corto y largo plazo sobre el consumo per cápita, capital per cápita, tipo de interés y salarios de una **disminución transitoria inesperada** del *gasto público*. Utilice un diagrama de fases en su discusión.

**e.** (10 puntos) Asuma que la economía se encuentra inicialmente en un equilibrio estacionario y de que el gobierno financia su gasto con deuda pública además de con impuestos de suma fija. Discuta los efectos a corto y largo plazo sobre el consumo per cápita, capital per cápita, tipo de interés y salarios de una **disminución transitoria inesperada** de los *impuestos* compensada con un aumento en la misma cuantía de la deuda pública. Utilice un diagrama de fases en su discusión.

**Soluciones**

**a.** El Planificador Social resuelve el siguiente problema de decisión: dado $\{d(t)\}$ elegir $\{c(t),\, k(t)\}$ para maximizar

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{u(c(t)) + v(d(t))\}$$

sujeto a las restricciones

$$\begin{gathered} c(t) + (1+n)k(t+1) - (1-\delta)k(t) + d(t) = f[k(t)] \\ k(0) = k_0;\; c(t), k(t) \geq 0. \end{gathered}$$

**b.** Para resolver el problema escribimos el Lagrangiano como

$$\begin{aligned} L[\{c(t), a(t), \lambda(t)\}_{t=0}^{\infty}] &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{u(c(t)) + v(d(t)) - \lambda(t)[c(t) \\ &\quad +(1+n)k(t+1) - (1-\delta)k(t) + d(t) - f[k(t)]]\}. \end{aligned}$$

Las condiciones necesarias (y suficientes en este caso) son:

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial c(t)} = \beta^t \left[u'[c(t)] - \lambda(t)\right] = 0$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial k(t+1)} = -\beta^t (1+n)\lambda(t) + \beta^{t+1}\lambda(t+1)\left[1 - \delta + f'(k(t+1))\right] = 0$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \lambda(t)} = \beta^t [c(t) + (1+n)k(t+1) - (1-\delta)k(t) + d(t) - f[k(t)]] = 0.$$

Estas ecuaciones se pueden resumir en

$$u'[c(t)] = \beta u'[c(t+1)]\left[1 - \delta + f'(k(t+1)) - n\right] \tag{B1}$$

$$c(t) + (1+n)k(t+1) - (1-\delta)k(t) + d(t) = f[k(t)]. \tag{B2}$$

Las condiciones de contorno son la condición inicial

$$k(0) = k_0 \text{ dado,} \tag{B3}$$

y la condición de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t u'[c(t)]\, k(t) = 0. \tag{B4}$$

**c.** La asignación del Problema del Planificador coincide con la del equilibrio competitivo si el gasto público se financia con impuestos de suma fija . Este resultado es una consecuencia del Primer Teorema del Bienestar que asegura que en una economía sin externalidades ni impuestos distorsionadores y con mercados competitivos, la asignación del equilibrio competitivo es Pareto Óptima (es decir, resuelve el problema del Planificador Social).

El salario y el precio del capital en un equilibrio competitivo serían iguales a las productividades marginales del trabajo y el capital, respectivamente. Es decir,

$$w(t) = f[k(t)] - k(t)f'[k(t)]$$

$$r(t) = f'[k(t)].$$

El tipo de interés es igual al precio del capital menos la depreciación por la condición de no arbitrage:

$$R(t) = r(t) - \delta = f'[k(t)] - \delta.$$

Estos resultados dependen de como se financia el gasto público. Si el gasto público se financiara con impuestos distorsionadores (como, por ejemplo, impuestos proporcionales sobre la renta), la asignación del equilibrio competitivo no sería un óptimo de Pareto y no coincidiría con la asignación escogida por un Planificador Social. Por otro lado, las expresiones que ligan los precios con el capital podrían depender de los impuestos.

**d.** Para responder esta pregunta tenemos que hacer un diagrama de fases. La curva $\Delta c = 0$ aparece de la expresión (B1) y sería igual a

$$\frac{1}{\beta} = 1 - \delta + f'\left(k(t+1)\right) - n. \tag{D1}$$

La curva $\Delta k = 0$ aparece de la expresión (B2) y sería igual a

$$c(t) = f\left[k(t)\right] - (\delta + n)k(t) - d(t). \tag{D2}$$

Estas dos curvas están dibujadas en el gráfico 1 al final de este documento. La economía se encuentra inicialmente en un estado estacionario representado por el punto $E_0$. Según las expresiones (D1) y (D2), una disiminución del gasto público implica un desplazamiento hacia arriba (norte) de la curva $\Delta k = 0$ en el diagrama de fase. El desplazamiento vertical de esta curva es igual a la disminución del gasto (igual a la de los impuestos). La curva $\Delta c = 0$ no se desplaza. Sin embargo, el desplazamiento de la curva $\Delta k = 0$ es temporal y, en el futuro, la economía volverá a sus niveles iniciales de gasto, es decir a la curva $\Delta k = 0$ inicial.

Como el cambio es inesperado, los agentes no pueden modificar sus decisiones antes del período donde se produce el cambio (vamos a llamar a este período el período $t_1$). Esto quiere decir que desde el período 0 hasta el período $t_1$ la economía está en su estado estacionario correspondiente al nivel inicial de gasto. En ese período el planificador ha de elegir el consumo óptimo correspondiente al nivel de capital $k_{ss}$ teniendo en cuenta los cambios futuros en el gasto público. Como al individuo le han disminuido los impuestos se siente más rico temporalmente. Lo que quiere hacer es distribuir ese aumento de renta a lo largo de toda su vida de forma óptima. Para ello aumenta su consumo pero no tanto como la disminución de los impuestos lo que le permite aumentar también su ahorro para poder mantener su consumo alto durante toda su vida. Como el capital es el mismo que en períodos anteriores el producto en el período $t_1$ también es el mismo e igual a $y_{ss} = f(k_{ss})$.

Como en el momento $t_1$ el consumo se encuentra por debajo de la curva $\Delta k = 0$ (la nueva) , el capital aumenta y se hace mayor a $k_{ROM}$. Esto seguirá ocurriendo mientras que el gasto público (y los impuestos) sean bajos. A medida que aumenta el capital su rendimiento disminuye y entramos en una trayectoria decreciente del consumo (aunque todos los consumos a partir de $t_1$ sean mayores que el del estado estacionario inicial, $c_{ss}$). La economía sigue a lo largo de la trayectoria sureste hasta que llega a la trayectoria de silla justo en el momento en que la curva $\Delta k = 0$ se vuelve a desplazar a su posición original. De esta forma, el consumo óptimo ya está ubicado en la trayectoria de silla y no es necesario que el consumo salte para ubicarse en la trayectoria de silla. Luego, la economía se mueve en dirección suroeste a lo largo de la trayectoria de silla hacia el punto $E_0$ en el diagrama de fase. La evolución de las variables a lo largo del tiempo se muestran en las figura 2.

En resumen, el individuo se da cuenta en $t_1$ que a partir de entonces vivirá unos períodos donde será relativamente rico (esos en los que los impuestos son bajos porque el gasto público es bajo) y otros donde será relativamente pobre (esos en los que los impuestos tienen un nivel normal). Lo que hace el individuo es consumir por debajo de sus posibilidades cuando es relativamente rico para poder consumir por encima de sus posibilidades cuando es relativamente pobre y asi disfrutar de ese aumento de renta temporal toda su vida. Lo que tiene que decidir es cómo hacerlo óptimamente.

**e.** Para responder esta pregunta tenemos que las curvas $\Delta c = 0$ y $\Delta k = 0$ no aparecen los impuestos. Por lo tanto, en aquellos períodos donde sólo cambian los impuestos las curvas no cambian y, por lo tanto, las decisiones del individuo son las mismas que antes de cambiar los impuestos. En este caso, todas las variables permanecen en sus niveles correspondientes al estado estacionario. El gráfico de las trayectorias aparece en la figura 3.

La razón es la siguiente. Ahora el individuo se da cuenta en $t_1$ que a partir de entonces vivirá unos períodos donde será relativamente rico (esos en los que los impuestos son bajos porque el gobierno financia el gasto con deuda) y otros donde será relativamente pobre (esos en los que los impuestos son mayores de lo normal porque el estado tiene que pagar su deuda). En particular, el aumento de impuestos en el futuro es exactamente igual al valor presente del ahorro de impuestos. De esta forma, el individuo ahorra todo la reducción de impuestos para hacer frente la aumento que ocurrirá en el futuro. Este ahorro no se canaliza a capital sino que lo adquiere el Estado como deuda pública. Este resultado se llama Equivalencia Ricardiana y ocurre porque los impuestos son de suma fija (no distorsionadores).

**Ejercicio 2. Ayudas internacionales en el modelo de generaciones solapadas (50 puntos)**

Considere una economía cerrada donde cada período nace una generación de individuos. El tamaño de cada generación crece a la tasa constante $n$, es decir, $L_{t+1} = (1+n)L_t$ para todo $t$. Los individuos viven dos períodos y nacen con una unidad de tiempo que ofrecen inelásticamente en el mercado de trabajo durante el primer período de vida. En el segundo período de vida los individuos están jubilados y no trabajan.

Las preferencias de un individuo nacido en $t$ se representan con la función de utilidad

$$\ln(c_{1t}) + \beta \ln(c_{2t+1}),$$

donde $c_{1t}$ es el consumo de joven y $c_{2t+1}$ es el consumo de viejo de un individuo nacido en el período $t$. El parámetro $0 < \beta < 1$ es la tasa de descuento intertemporal de la utilidad. Los jóvenes pueden ahorrar para financiar su consumo de viejo. La tasa de interés del ahorro que se acumula para estar disponible en el momento $t+1$ es $R_{t+1}$ (los jóvenes también pueden endeudarse).

En esta economía existe un único bien final que se puede dedicar a consumo o a inversión en capital físico. El bien final se produce utilizando capital y trabajo. La función de producción es $Y_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$ por lo que no existe progreso tecnológico. En esta función de producción $\alpha \in (0,1)$ es la participación de las rentas del capital y $K_t$ es el stock de capital en el período $t$. El capital se deprecia a la tasa constante $\delta$. El precio de utilizar la mano de obra es de $w_t$ por trabajador. El precio de utilizar el capital durante un período es de $r_t$. Tanto el mercado del bien final como los mercados de factores son perfectamente competitivos.

**a.** (10 puntos) Escriba y resuelva el problema del consumidor nacido en $t$. Es decir obtenga una expresión del consumo cuando joven y viejo y del ahorro ($c_{1,t}$, $c_{2,t+1}$, y $s_{t+1}$) en función de $w_t$ y $R_{t+1}$ y los parámetros del problema.

**b.** (5 puntos) Defina un equilibrio competitivo.

**c.** (10 puntos) Encuentre la ecuación en diferencias en términos del capital por trabajador ($k_t = K_t/L_t$) que caracteriza el equilibrio competitivo.

**d.** (5 puntos) Encuentre el valor del capital en el estado estacionario. Calcule el bienestar que obtiene cada generación en el estado estacionario.

Imagine que desde el período $t = 0$ esta economía se encuentra en el estado estacionario caracterizado en el apartado (d). Sin embargo, al principio del período $t = 10$, una organización internacional regala de forma inesperada una cantidad de capital $x$ a cada agente viejo que vive en ese período.

**e.** (10 puntos) Utilice la ecuación en diferencias del apartado (c) para explicar la evolución del capital per cápita de esta economía desde el período 0 hasta el $\infty$. Represente gráficamente la evolución del capital por trabajador, el tipo de interés y el salario desde el período 0 hasta el $\infty$.

**f.** (10 puntos) Imagine que la organización internacional hubiera regalado esa cantidad a cada joven que viva en el período $t = 10$. ¿Cómo cambiarían sus respuestas en el apartado (e)?

**Soluciones**

**a.** Un individuo que nace en $t$ querrá elegir el consumo $c_{1t}$ y $c_{2t+1}$ para maximizar

$$\ln(c_{1t}) + \beta \ln(c_{2t+1})$$

sujeto a su restricción presupuestaria

$$c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1 + R_{t+1}} = w_t,$$

y las condiciones de no-negatividad

$$c_{1,t} \ , \ c_{2,t+1} \geq 0.$$

El Lagrangiano de este problema es:

$$L = \ln(c_{1t}) + \beta \ln(c_{2t+1}) - \lambda \left[ c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1 + R_{t+1}} - w_t \right],$$

y las condiciones de primer orden son

$$\frac{\partial L}{\partial c_{1t}} = c_{1t}^{-1} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_{2t+1}} = \beta c_{2t+1}^{-1} - \frac{\lambda}{1 + R_{t+1}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = - \left[ c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1 + R_{t+1}} - w_t \right] = 0,$$

por lo que tenemos un sistema de tres ecuaciones en tres incóngitas

$$c_{1t}^{-1} = \lambda$$

$$\beta c_{2t+1}^{-1} = \frac{\lambda}{1 + R_{t+1}}$$

$$c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1 + R_{t+1}} = w_t.$$

Sustituyendo $\lambda$ en la segunda expresión

$$\beta c_{2t+1}^{-1} = \frac{c_{1t}^{-1}}{1 + R_{t+1}},$$

o

$$\beta(1+R_{t+1}) = \frac{c_{2t+1}}{c_{1t}}$$

que es la ecuación de Euler. Combinando la ecuación de Euler y la restricción presupuestaria obtenemos

$$c_{1t} + \beta(1+R_{t+1})c_{1t}\frac{1}{1+R_{t+1}} = w_t,$$

o

$$(1+\beta)c_{1t} = w_t,$$

por lo que

$$c_{1t} = \frac{1}{1+\beta}w_t.$$

Por otro lado,

$$s_{t+1} = w_t - c_{1t} = \frac{\beta}{1+\beta}w_t,$$

y

$$c_{2t+1} = \beta\left(1+R_{t+1}\right)c_{1t} = \frac{\beta}{1+\beta}\left(1+R_{t+1}\right)w_t$$

**b.** Un equilibrio competitivo es una asignación $\{c_{1t},\ c_{2t+1},\ K_t,\ L_t\}$ y un sistema de precios $\{w_t,\ r_t,\ R_t\}$ tal que

1. $\{c_{1t}, c_{2t+1}\}$ maximiza el problema del consumidor en $t = 0, 1, ...$ dados los precios, es decir, satisface

$$c_{1t} = \frac{1}{1+\beta}w_t.$$

$$s_{t+1} = w_t - c_{1t} = \frac{\beta}{1+\beta}w_t,$$

y

$$c_{2t+1} = \beta\left(1+R_{t+1}\right)c_{1t} = \frac{\beta}{1+\beta}\left(1+R_{t+1}\right)w_t.$$

2. los viejos en $t = 0$, maximizan su utilidad

$$c_{20} = \frac{K_0}{L_{-1}}\left(1+R_0\right)$$

3. las empresas maximizan beneficios, es decir,

$$\max_{K_t, L_t}\left[F\left(K_t, A_tL_t\right) - w_tA_tL_t - r_tK_t\right]$$

por lo que el precio de los factores es

$$r_t = f'\left[k_t\right] = \alpha k_t^{\alpha-1}$$

$$w_t = f(k_t) - k_tf'(k_t) = (1-\alpha)k_t^{\alpha}.$$

4. no hay arbitraje entre distintas formas de inversión, es decir,

$$R(t) = r(t) - \delta$$

5. los mercados se vacían

$$L_t c_{1t} + L_{t-1} c_{2t} + K_{t+1} - (1-\delta) K_t = F(K_t, A_t L_t)$$

$$K_{t+1} = L_t s_{t+1}.$$

**c.** El stock de capital en el período $t+1$ ha de ser igual a la cantidad ahorrada por los jóvenes en el período $t$, es decir,

$$K_{t+1} = s_{t+1} L_t = \frac{\beta}{1+\beta} w_t L_t.$$

Dividiendo por el trabajo

$$\frac{L_{t+1}}{L_t} \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{\beta}{1+\beta} w_t$$

o

$$(1+n)\, k_{t+1} = \frac{\beta}{1+\beta} w_t.$$

En equilibrio sabemos que

$$w_t = (1-\alpha) k_t^{\alpha},$$

por lo que podemos escribir

$$k_{t+1} = \left(\frac{1}{1+n}\right)\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)(1-\alpha) k_t^{\alpha}.$$

**d.** En el estado estacionario $k_t = k_{t+1} = k_{ss}$. Sustituyendo en la ecuación en diferencias

$$k_{ss} = \left[\left(\frac{1}{1+n}\right)\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)(1-\alpha)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Para calcular el bienestar de cada agente en el estado estacionario hemos de calcular los niveles de consumo per cápita:

$$c_{1ss} = \frac{1}{1+\beta} w_{ss} = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)(1-\alpha) k_{ss}^{\alpha} = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)(1-\alpha)\left[\left(\frac{1}{1+n}\right)\left(\frac{1}{1+\beta}\right)(1-\alpha)\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

y

$$c_{2ss} = \frac{\beta}{1+\beta}(1+R_{ss})\, w_{ss} = \frac{\beta}{1+\beta}\left(1 + \alpha k_{ss}^{\alpha-1} - \delta\right)(1-\alpha) k_{ss}^{\alpha}$$

donde sustituiremos por el valor de $k_{ss}$. Una vez que tenemos estos valores, hemos de sustituir en la función de utilidad

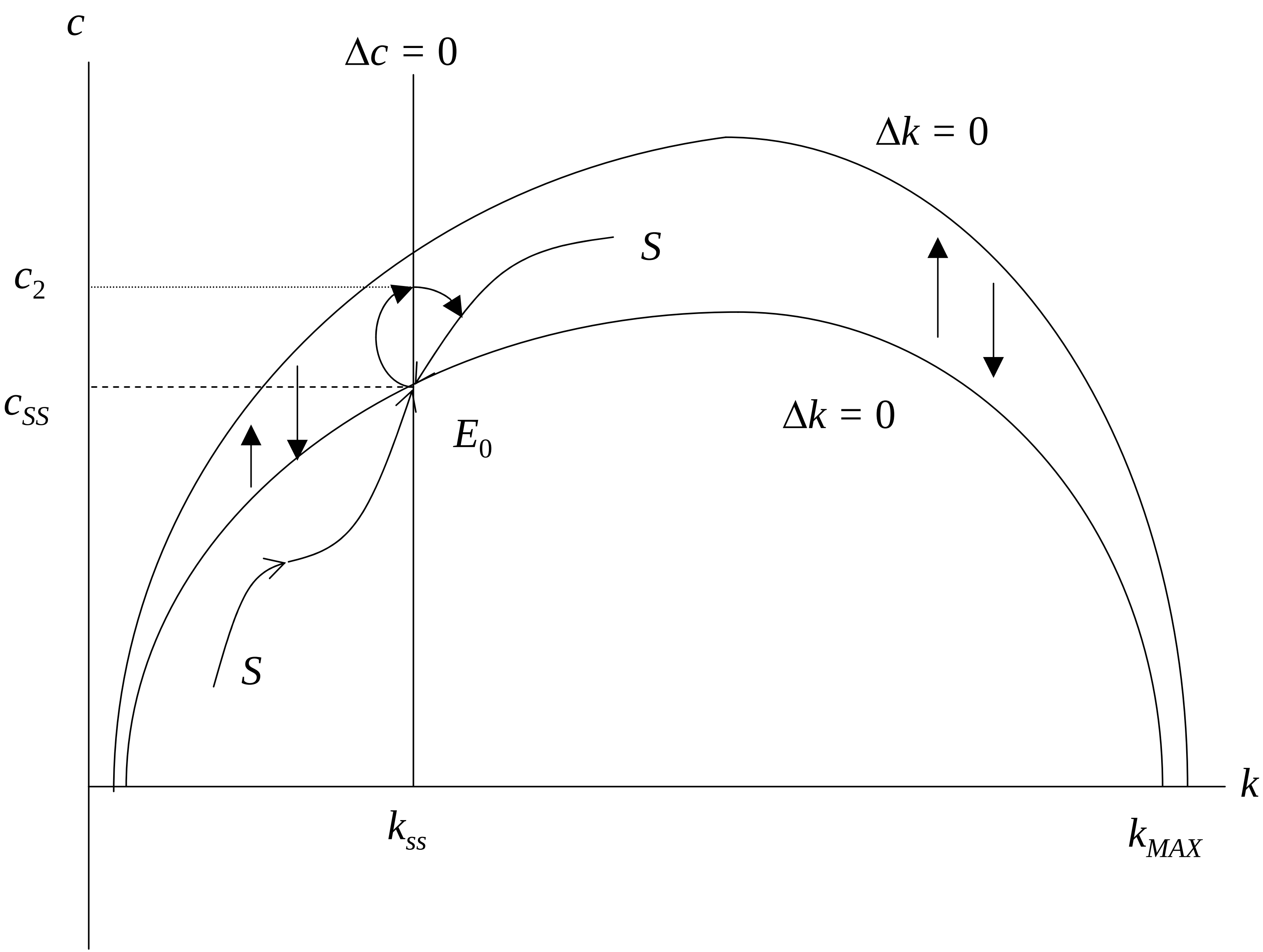
$$\ln(c_{1ss}) + \beta \ln(c_{2ss})$$

para calcular el bienestar.

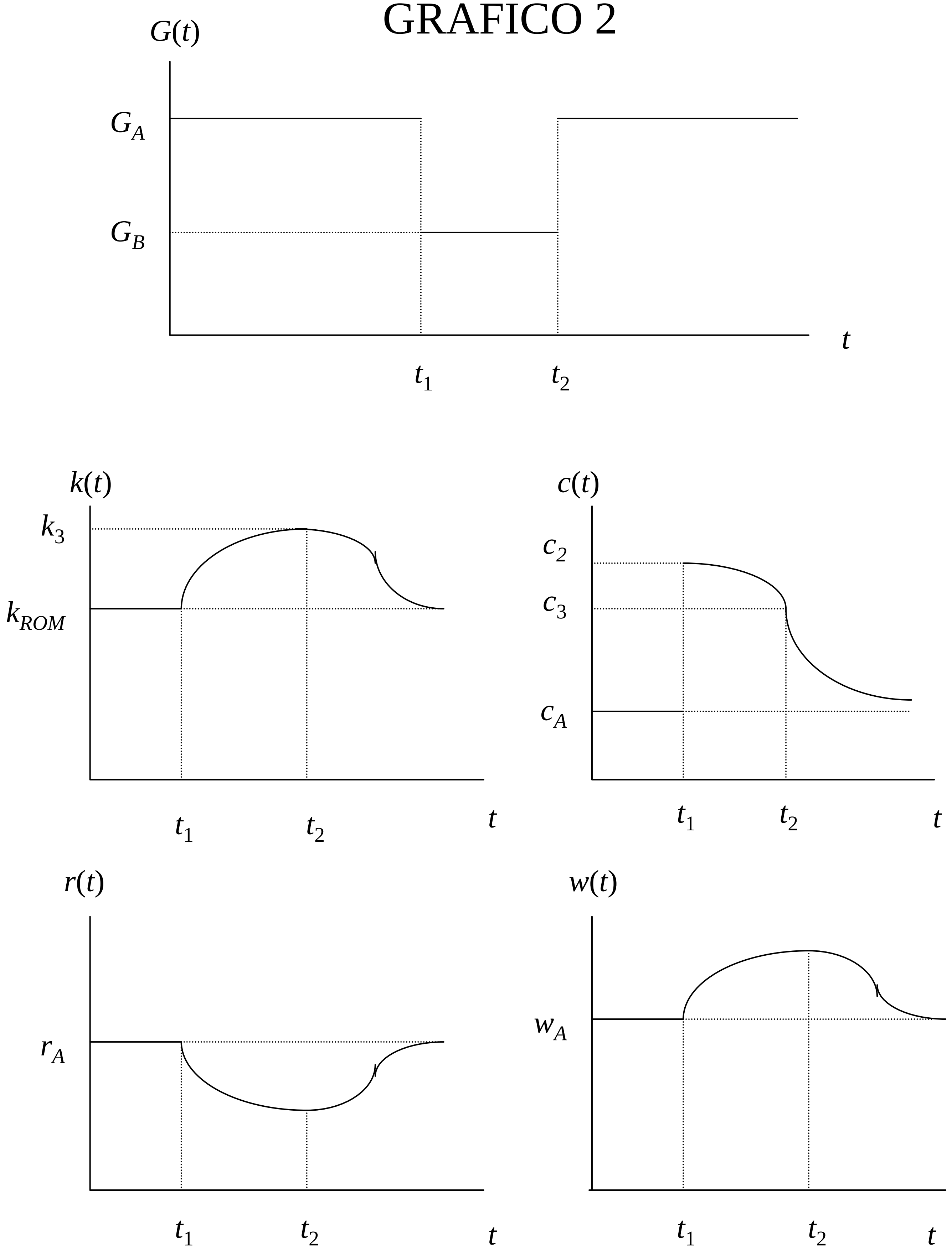
**e.** La ecuación en diferencias no cambia. Lo único que cambia es la cantidad de capital de la economía que, como consecuencia del regalo, es mayor. El capital aumenta por encima de su estado estacionario y luego disminuye hasta converger al estado estacionario. Al aumentar el capital, su rendimiento y, por lo tanto, el tipo de interés disminuyen mientras que el salario aumenta. Por otro lado, al aumentar el capital el consumo disminuye. La evolución del capital está en el gráfico 3.

**f.** Cualitativamente la respuesta es la misma. Un regalo de capital hace que el capital, el consumo y el salario aumenten en la economía y que el tipo de interés disminuya. Sólo hay dos diferencias cuantitativas. Por un lado, si $n > 0$ hay más jóvenes que viejos por lo que al ser un regalo per cápita, la cantidad que auneta el capital agregado es mayor en el apartado (f) que en el (e). En segundo lugar dado que la propiedad del capital es distinta en los dos apartados, las rentas que se extraen del capital van a parar a distintos individuos lo que afecta a su consumo. En el apartado (e) son los viejos los que se vuelven más ricos y en el apartado (f) los jóvenes. El gráfico es igual al 3.

# GRAFICO 1



# GRAFICO 2



G(t)
G_A
G_B
t
t_1
t_2
k(t)
k_3
k_ROM
t_1
t_2
t
c(t)
c_2
c_3
c_A
t_1
t_2
t
r(t)
r_A
t_1
t_2
t
w(t)
w_A
t_1
t_2
t

GRAFICO 3